1. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ___개

▷ 정답 : 24개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24개

2. 식 $(a+b+c)(x+y+z)$ 를 전개하였을 때, 항의 개수는?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

해설

a, b, c 가 선택할 수 있는 항이 각각 3 가지씩 있으므로 $3+3+3=9$

3. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$216 = 2^3 \times 3^3$,

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 에서

G.C.D. : $2^3 \times 3^2$

따라서 공약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$

4. 540 의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

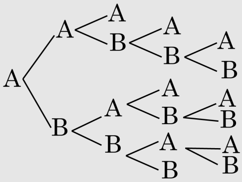
$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$$
$$= 7 \times 40 \times 6 = 1680$$

5. A, B 두 사람이 테니스 경기를 하는데, 경기는 5세트 중 3세트 이기는 쪽이 승리한다. A가 먼저 1승을 거둔 상태에서 승부가 결정될 때까지 일어날 수 있는 모든 경우의 수는?

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 10 가지

해설



6. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

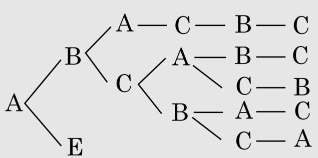
지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

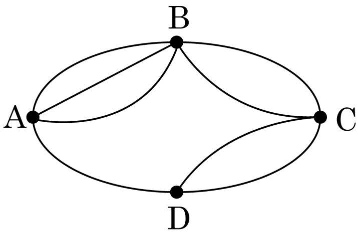
① 36　② 48　③ 60　④ 120　⑤ 240

해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는
$5 \times 8 \times 2 = 80$ (가지)
또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다.
따라서 구하는 방법의 수는
$80 \times 3 = 240$ (가지)



7. 네 개의 도시 A, B, C, D 사이에는 아래 그림과 같은 도로가 있다. A 를 출발하여 모든 도시를 한번 씩만 거치고, 다시 A 로 돌아오는 방법의 수는?

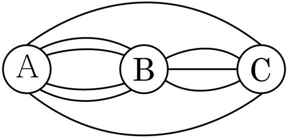


① 26　② 24　③ 20　④ 16　⑤ 12

해설

$A-B$ 도로의 가지 수 : 3 가지
$B-C$ 도로의 가지 수 : 2 가지
$C-D$ 도로의 가지 수 : 2 가지
$D-A$ 도로의 가지 수 : 1 가지
(i) $A \to B \to C \to D \to A$ 인 경우
$3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$
(ii) $A \to D \to C \to B \to A$ 인 경우
$1 \times 2 \times 2 \times 3 = 12$
그런데 (i)과 (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용하여
$\therefore 12 + 12 = 24$ (가지)

8. 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4 가지, B 에서 C 로 가는 길은 3 가지, A 에서 C 로 가는 길은 2 가지이다. A 에서 C 를 왕복하는 데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수는?



① 24 ② 48 ③ 56 ④ 72 ⑤ 96

해설

(1) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$

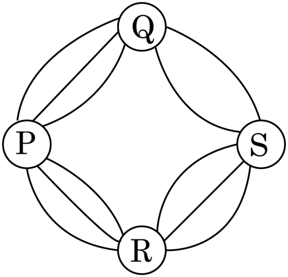
: $2 \times 3 \times 4 = 24$

(1) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

: $4 \times 3 \times 2 = 24$

$\therefore 24 + 24 = 48$

9. 네 지점 P, Q, R, S 를 연결하는길이 아래 그림과 같다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 P 에서 S 로가는 길을 택하는 방법은 몇가지인지 구하여라.



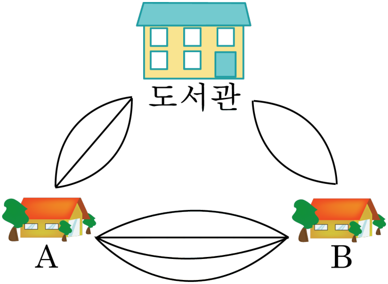
▶ 답 : ____ 가지

▷ 정답 : 15 가지

해설

(1) $P \to Q \to S$ 인 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
(2) $P \to R \to S$ 인 경우 $3 \times 3 = 9$ (가지)
이때, (1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 방법의 수는 $6 + 9 = 15$ (가지) 이다.

10. A 군의 집과 B 양의 집에서 도서관으로 직접 가는 길은 각각 3 가지, 2 가지가 있고, A 군의 집에서 도서관을 거치지 않고 B 양의 집으로 가는 길은 4 가지가 있다. A 군의 집을 출발하여 B 양의 집과 도서관을 각각 한 번씩만 들린 후 다시 A 군의 집으로 되돌아오는 방법의 수는?



① 18 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

(i) A 군의 집에서 도서관을 거쳐 B 양의 집으로 간 다음도서관을 거치지 않고 A 군의 집으로 되돌아오는방법의 수는 $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)

(ii) A 군의 집에서 도서관을 거치지 않고 B 양의 집으로 간 다음 도서관을 거쳐 A 군의 집으로 되돌아오는방법의 수는 $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)

따라서, 구하는 방법의 수는 $24 + 24 = 48$ (가지)

11. 5 원짜리 동전 4 개, 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 1 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 17 가지

해설

5 원짜리 동전 4 개이면 10 원짜리 동전 2 개와 같으므로 금액이 중복된다.
10 원짜리 동전 2 개를 5 원짜리 동전 4 개로 바꾸면 5 원짜리 동전 8 개, 100 원짜리 동전 1 개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1)=18$ 가지
돈이 0 원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1=17$ 가지

12. 10000 원짜리 지폐 2장, 5000 원짜리 지폐 2장, 1000 원짜리 지폐 3장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

① 27 ② 35 ③ 42 ④ 60 ⑤ 81

해설

5000 원짜리 2장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2장을 5000 짜리 지폐 4장으로 바꾸면, 5000 짜리 지폐 6장, 1000 원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$

13. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 2 개, 10 원짜리 동전 2 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, 0 원은 제외)

① 14　　② 26　　③ 40　　④ 46　　⑤ 66

해설

각 동전을 사용하여 지불 할 수 있는 방법의 가짓수는 100 원짜리가 3 가지, 50 원짜리가 3 가지, 10 원짜리가 3 가지이고, 0 원이면 지불하는 것이 아니므로

(지불 방법의 수)$=(2+1)(2+1)(2+1)-1=26$(가지)

지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꿔 생각한다.

즉, 50 원짜리 동전 6 개와 10 원짜리 동전 2 개로 지불할수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.

$\therefore$(지불 금액의 수) $=(6+1)(2+1)-1=20$(가지)

$\therefore a+b=26+20=46$

14. 100 원짜리 동전 4 개, 50 원짜리 동전 2 개, 10 원짜리 동전 3 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 총합을 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 92 가지

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각각의 동전을 사용할 수 있는 경우의 수는 (각 동전의 갯수)+1 가지이다.
그러나, 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,
∴ (지불 방법의 수)$= (4+1)(2+1)(3+1)-1 = 59$
50 원짜리 동전이 2 개가 되면 100 원을 지불할 수 있으므로, 지불 금액의 수는 금액이 중복되지 않도록 100 원짜리 동전 4 개를 50 원짜리 동전 8 개로 바꿔 생각한다.
즉, 50 원짜리 동전 10 개와 10 원짜리 동전 3 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.
∴(지불 금액의 수)$= (10+1)(3+1)-1 = 43$
$\therefore 59 + 43 = 92$(가지)

15. 5원 짜리 동전 4개, 10원 짜리 동전 2개, 100원 짜리 동전 1개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인가?

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 22 ⑤ 26

해설

5원 짜리 동전 4개이면 10원 짜리 동전 2개와 같으므로 금액이 중복된다.
10원 짜리 동전 2개를 5원 짜리 동전 4개로 바꾸면 5원 짜리 동전 8개, 100원 짜리 동전 1개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1)=18$(가지)
돈이 0원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1=17$(가지)

16. 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 거스름돈 없이 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 모두 몇 가지인가? (단, 사용하지 않는 지폐가 있어도 된다.)

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐의 수를 각각 x, y, z라 하면

$10000x + 5000y + 1000z = 17000$

$\therefore\ 10x + 5y + z = 17$

(i) $x = 1$일 때, $5y + z = 7$이므로

(y, z)는 $(1, 2), (0, 7)$의 두 가지

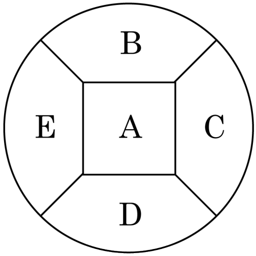
(ii) $x = 0$일 때, $5y + z = 17$이므로

(y, z)는 $(3, 2), (2, 7), (1, 12), (0, 17)$의 4가지

(i), (ii)에서 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 17000원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는

$2 + 4 = 6$(가지)

17. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160 ② 270 ③ 360 ④ 420 ⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B 를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지, C 를 칠할 수 있는 방법은 3 가지이다.

(i) B 와 D 가 다른 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 A, B, C 에 칠한 색을 제외한 2 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 A, B, D 에 칠한 색을 제외한 2 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ (가지)

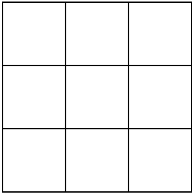
(ii) B 와 D 가 같은 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 B 와 동일하므로 1 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 $A, B(= D)$ 에 칠한 색을 제외한 3 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$ (가지)

따라서 (i) (ii) 에서 $240 + 180 = 420$ (가지)

18. 서로 다른 9 가지의 색으로 오른쪽 정사각형 모양의 모눈 칠판을 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 이 모눈 칠판은 회전해서 같은 모양이면 한 가지 경우로 생각한다.)



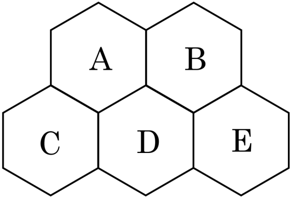
① $8!$　② $9! \times \dfrac{1}{2}$　③ $9! \times \dfrac{1}{3}$
④ $9! \times \dfrac{1}{4}$　⑤ $9!$

해설

먼저 한 가운데에 있는 정사각형을 칠하는 색을 정한 다음, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법을 생각한다. ‘가’ 에 칠하는 색을 고르는 방법은 9 가지가 있다. 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $\dfrac{8!}{4}$ 이므로

구하는 경우의 수는 $9 \times \dfrac{8!}{4} = \dfrac{9 \times 8!}{4} = 9! \times \dfrac{1}{4}$

19. 다음 그림의 A, B, C, D, E 에 다섯 가지의 색을 칠하여 그 경계를 구분하는 방법의 수는? (단, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있다.)

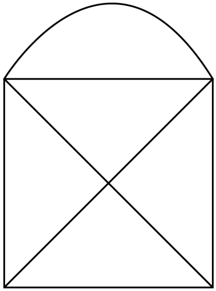


① 530 ② 540 ③ 550 ④ 560 ⑤ 570

해설

주어진 그림에서 D 는 A, B, C, E 와 모두 접하므로 D 에 칠한 색은 다른 곳에 칠하면 안 된다.
따라서 $D \to C \to A \to B \to E$ 의 순서로 색을 칠한다고 하면 D 는 5 가지, C 는 4 가지, A 는 3 가지, B 는 3 가지, E 는 3 가지의 색을 칠할 수 있으므로 구하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)

20. 다음 그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

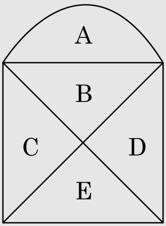


▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 A , B 영역에 칠할 수 있는 색은 각각 3 가지, 2 가지이다.

i) C , D 영역에 같은 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×2 가지

ii) C , D 영역에 다른 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×1 가지

$\therefore 3 \times 2 \times (2 \times 2 + 2 \times 1) = 36$

21. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

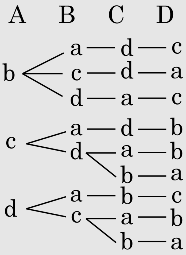
$a_1 < a_2 < a_3$ 이고 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족하는 순서쌍은 $(2,4,6), (2,6,10), (4,6,8), (4,8,12), (6,8,10)$ $(8,10,12)$ 의 6 가지

22. A, B, C, D 네 사람이 각자 모자 a, b, c, d 를 하나씩 가져갔을 때, 모두 다른 사람의 모자를 가져갔을 경우의 수는?

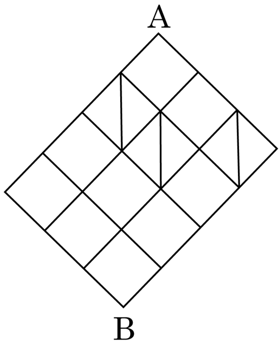
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

해설

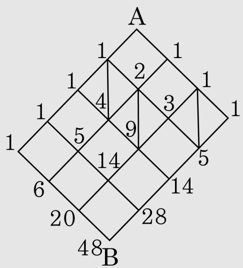


23. 다음과 같은 통로가 있다. A에 공을 넣으면 통로를 지나 B로 나오게 되어 있다. A에 하나의 공을 넣을 때, 공이 지나는 경로의 수는?



① 34 ② 36 ③ 41 ④ 48 ⑤ 52

해설



24. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 4 개, 10 원짜리 동전 4 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 118 가지

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각각의 동전을 사용할 수 있는 경우의 수는 (각 동전의 갯수)+1 가지이다.
그러나, 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,
$\therefore$(지불 방법의 수)$= (2+1)(4+1)(4+1)-1 = 74$
50 원짜리 동전이 2 개가 되면 100 원을 지불할 수 있으므로, 지불 금액의 수는 금액이 중복되지 않도록 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꿔 생각한다.
즉, 50 원짜리 동전 8 개와 10 원짜리 동전 4 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.
$\therefore$(지불 금액의 수)$= (8+1)(4+1)-1 = 44$

25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하자. $f(x)=(a-4)x+6$, $g(x)=(3-b)x+2$ 라 할 때 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$y=f(g(x))=(a-4)\{(3-b)x+2\}+6$$
$$=(a-4)(3-b)x+(2a-2)$$

함수의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위해서는 $2a-2\neq 0$ 이고 $(a-4)(3-b)=0$ 이다.

$\therefore$ (a,b) 는 $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(5,3)$, $(6,3)$ 의 10 가지