

1. x 에 대한 이차방정식 $2mx^2 + (5m+2)x + 4m+1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}, -2$

② $-\frac{7}{12}, -\frac{1}{2}$

③ $-\frac{7}{2}, 2$

④ $-\frac{2}{7}, 2$

⑤ $\frac{2}{7}, \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$D = (5m + 2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (4m + 1) = 0$$

$$25m^2 + 20m + 4 - 32m^2 - 8m = 0$$

$$7m^2 - 12m - 4 = 0$$

$$(7m + 2)(m - 2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{7} \text{ 또는 } 2$$

2. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 0, b = 3$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

3. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k + 1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2x^2 + (k + 1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k + 1)^2 - 8(k - 1) = 0$$

$$(k - 3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

4. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \leq x < 0$

② $-1 \leq x < 1$

③ $-1 \leq x < 2$

④ $0 \leq x < 1$

⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$[x] = -1 \text{ 또는 } [x] = -\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 은 정수이므로 $[x] = -1$

$$\therefore -1 \leq x < 0$$

5. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로

$$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$$

6. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

① $-2 + \sqrt{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 3

⑤ $-1 + \sqrt{3}$

해설

방정식 $f(2x) = 0$ 에서 $2x = t$ 로 놓으면

$$f(t) = 0 \dots \dots \textcircled{1}$$

①의 두 근이 $t = \alpha$ 또는 $t = \beta$ 이므로

$$2x = \alpha \text{에서 } x = \frac{\alpha}{2}, 2x = \beta \text{에서 } x = \frac{\beta}{2}$$

따라서 방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$$

7. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = 2k + 3$$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), \quad 4k^2 - 8k - 12 = 20$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

8. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1

② -2

③ 3

④ -4

⑤ 5

해설

$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$M = k^2 + 4k$ 이므로

$M = (k + 2)^2 - 4$ 이다.

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

9. 방정식 $|x + 5| = 1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

- ① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$$|x + 5| = 1$$

$$\Rightarrow x + 5 = 1 \text{ 또는 } x + 5 = -1$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -6$$

10. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 5$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x - 1)^2 \geq 0, (y + 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

11. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$ 이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \text{..... ㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

12. $x + y = 3$ 일 때 $x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{13}{4}$

해설

$$x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3$$

$$x - y^2 = x - (-x + 3)^2$$

$$= x - (x^2 - 6x + 9)$$

$$= -x^2 + 7x - 9$$

$$= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

13. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$ 의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$

② $2 \leq m < 3$

③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \leq 3$

⑤ $3 < m \leq 4$

해설

두 근을 α, β 라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$$

$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m-2)(m+1) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1, m \geq 2$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore m > 1$$

$$(iii) \alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore m < 3$$

$\therefore (i), (ii), (iii)$ 의 공통범위는 $2 \leq m < 3$

14. $x^2 + ax + (a^2 + 2a - 3) = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $0 < a < 1$

② $\frac{1}{2} < a < 2$

③ $1 \leq a < 2$

④ $2 < a \leq 3$

⑤ $-\frac{1}{2} < a < 2$

해설

두 근을 α, β 라 하면

$|\text{음근}| > \text{양근}$ 이므로

$$\alpha + \beta = -a < 0, \alpha\beta = a^2 + 2a - 3 < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$