1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

2. $x^3-2x^2-5x+6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=-2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 으로 놓으면
$f(1)=1-2-5+6=0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x+2)(x-3)$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

3. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(ⅰ) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$
(ⅱ) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

4. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

5. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

6. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

7. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$x=0$을 대입하면

$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2으로 나누면

$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$

여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0,\ (X+7)(X-2)=0$

$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$

(i) $X=-7$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore\ \frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

(i), (ii)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.

8. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

9. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

10. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

11. $x^3+2x^2+3x+1=0$ 의 세 근을 α,β,γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$ 의
세 근이 α,β,γ 이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1 인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$ 로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
① 의 세 근이 α,β,γ 이므로
② 의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ 이다.
∴구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$ 에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

12. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

13. 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 한 근이 $\sqrt{3}-1$일 때, 유리수 $p,\ q$에서 $p+q$의 값은 ?

① -2　② -1　③ 3　④ 7　⑤ 9

해설

계수가 모두 유리수이고 $-1+\sqrt{3}$이 한 근이므로, 다른 한 근은 $-1-\sqrt{3}$이다.
또 다른 한근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})+\alpha=0,\ \alpha=2$

$(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})+\alpha\{(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\}=p$

$(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})\alpha=-q$

$\therefore\ p=-6,\ q=4$

$\therefore\ p+q=-2$

해설

$(\sqrt{3}-1)^3+p(\sqrt{3}-1)+q=0$

$-p+q-10+(6+p)\sqrt{3}=0$

$\therefore\ -p+q-10=0,\ 6+p=0$

$\therefore\ p=-6,\ q=4$

$\therefore\ p+q=-6+4=-2$

14. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

15. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$