1. $x^2 \neq 1$이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때, $f(-x)$를 $f(x)$를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$　② $-f(x)$　③ $\{f(x)\}^2$
④ $\dfrac{1}{f(x)}$　⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

2. 두 집합 $X = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수 f를 다음과 같이 정의할 때, 이 함수의 치역을 구하면?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & (x < 0) \\ x & (x = 0) \\ \dfrac{x^2}{4} & (x > 0) \end{cases}$$

① $\{0, 1, 2\}$　② $\{0, 1, 3\}$　③ $\{0, 1, 2, 3\}$

④ $\{0, 1, 2, 4\}$　⑤ $\{0, 1, 3, 4\}$

해설

$f(-4) = |-4| - 1 = 3$

$f(-2) = |-2| - 1 = 1$

$f(0) = 0$

$f(2) = \dfrac{4}{4} = 1$

$f(4) = \dfrac{16}{4} = 4$

$\therefore$ 치역 :$\{0,\ 1,\ 3,\ 4\}$

3. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

4. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|,\ g(x) = x$

㉡ 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때 $f(x) = x,\ g(x) = x^3$

㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ g(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = 1,\ g(-1) = -1$ 이므로 $f \neq g$
㉡ $f(-1) = g(-1) = -1,\ f(0) = g(0) = 0,$
$f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$
㉢ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2$인 모든 실수$\}$ 이고
$g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 모든 실수$\}$ 이므로 $f \neq g$
따라서 $f = g$ 인 것은 ㉡ 뿐이다.

5. 집합 $X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 1 + k$
$f(1) = -1 + k$
$f(3) = -3 + k$
이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.
$\therefore X = \{1 + k,\ -1 + k,\ -3 + k\}$
그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로
$X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서
$-3 + k = -1,\ -1 + k = 1,\ 1 + k = 3$
$\therefore k = 2$

6. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$ 를 모두 고르면?

(ⅰ) $f(x) = Y$(단, $x \in X$)
(ⅱ) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단,x, $x_2 \in X$)

A . $f(x) = x^2 - 1$
B . $f(x) = |x| + 2x$
C . $f(x) = x^3 + 1$
D . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

① A, B　② A, C　③ B, C　④ B, D　⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

7. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x) \geq x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$

$\Rightarrow x \leq 0,\ x \geq 5$

$x \geq k$ 이므로 $k = 5$

8. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \to Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개　② 5 개　③ 7 개　④ 9 개　⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

9. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x))=x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

① -1　　② 0　　③ $-1,\ 0$

④ $0,\ 1$　　⑤ $-1,\ 0,\ 1$

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서

$$f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\dfrac{x}{x-(x-1)}=x$$

즉, $x=x^3$ 에서 $x^3-x=x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 0,\ 1$

그런데 $x\neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 $-1,\ 0$

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x\text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x\text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

11. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 실수 a의 값을 정하면?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ 1　　⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$에서
$(x+a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x에 대해 성립하려면 $a = 0$

12. 함수 $f(x)$가 $f(2x-1) = x+2$ 일 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x-1=3$ 으로 놓으면 $x=2$

$\therefore\ f(3)=4$

13. 두 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x))=g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(h(x))=\dfrac{h(x)-1}{h(x)+2}=\dfrac{x+1}{x-1}=g(x)$

$(x-1)\{h(x)-1\}=(x+1)\{h(x)+2\}$

$2h(x)=-3x-1$

$\therefore\ h(x)=\dfrac{-3x-1}{2}$

$\therefore\ h(2)=-\dfrac{7}{2}$

해설

$f(h(2))=g(2)$ 에서, $h(2)=a$ 라 두면, $g(2)=3$ 이므로

$f(a)=3$, $\dfrac{a-1}{a+2}=3$

이를 풀면 $\therefore\ a=h(2)=-\dfrac{7}{2}$

14. 함수 f에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $\cdots$, $f^n \circ f = f^{n+1}$ 이라고 정의한다. $f(x) = x - 1$일 때, $f^{1998}(1)$의 값은?

① -1998　② -1997　③ 0
④ 1　⑤ 1998

해설

$f(x) = x - 1$
$f^2(x) = f(f(x)) = (x-1) - 1 = x - 2$
$f^3(x) = f^2(f(x)) = (x-1) - 2 = x - 3$
$\vdots$
$f^n(x) = x - n$ (n 은 정수)
$f^{1998}(x) = x - 1998$
$\therefore\ f^{1998}(1) = -1997$

15. 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x^2+ax+3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $a\leq -3, a\geq 2$ ② $-1\leq a\leq 1$ ③ $a\leq -2, a>3$
④ $-2\leq a\leq 2$ ⑤ $-1\leq a\leq 3$

해설

$g(x)=t$라 두면,
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^2-t-2\geq 0$에서
$t\leq -1$, $t\geq 2$에서
(i) $t\leq -1$
$x^2+ax+3\leq -1$
$x^2+ax+4\leq 0$ (부적절)
(ii) $t\geq 2$
$x^2+ax+3\geq 2$
$x^2+ax+1\geq 0$에서
$D=a^2-4\leq 0$
$\therefore\ -2\leq a\leq 2$

16. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$
② $-1 < k < 1$
③ $k < 1$
④ $k < -1$ 또는 $k > 1$
⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k+1)x - 7$
$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k-1)x - 3$
그런데 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로
$k < -1$ 또는 $k > 1$

17. 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=-2x+1$일 때, $(f\circ g^{-1})(x)$를 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$　② $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$　③ $y=\frac{1}{2}x$
④ $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$　⑤ $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

해설

$(g^{-1})(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(f\circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x))\\ &= \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-2\\ &= -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

18. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x \ge 0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=x+3$ 에 대하여 $(f^{-1}\circ g)(3)$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(6)$
$f^{-1}(6)=k$ 라 하면 $f(k)=6>0$ 이므로
$k\ge 0$ 이고 $f(k)=k^2+k=6$
$(k-2)(k+3)=0$
$\therefore\ k=2\ (\because\ k\ge 0)$
$\therefore\ (f^{-1}\circ g)(3)=2$

19. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)=3x+2$, $g(x)=x+2$ 일 때, $(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)=f^{-1}(5)+g^{-1}(5)$

$f^{-1}(5)=k$ 이면 $f(k)=5, g^{-1}(5)=X$ 이면 $g(X)=5$

$\Rightarrow k=1, X=3$

$\Rightarrow$(준식)$=1+3=4$

20. $f(x)=\begin{cases} x(x \le 0) \\ x^2(x>0) \end{cases}$, $g(x)=f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x)=g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$h(0)=g^{-1}(0)=k$

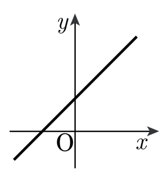
$g(k)=f(k+4)=0$

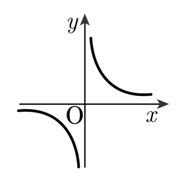
$\therefore\ k+4=0$

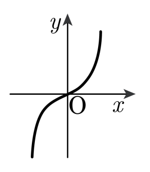
$\therefore\ k=-4$

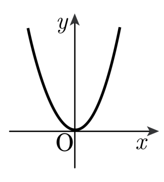
$\therefore\ h(0)=-4$

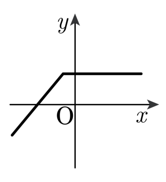
21. 다음 중 임의의 실수 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

①


②


③


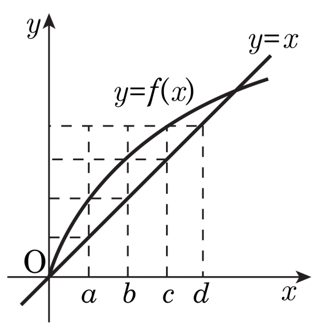
④


⑤


해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$이다.
그런데 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족하려면
함수 $f(x)$는 일대일 대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이어야 한다.

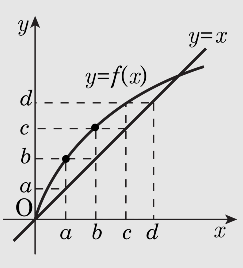
22. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b ② $b+d$ ③ $2b+c$

④ $b+c+d$ ⑤ $a+b+c$

해설



그림에서 $f(b)=c,\ f^{-1}(b)=a$ 이므로

$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$

23. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x+2$	㉡ $f(x) = -x-1$
㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x+4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.