1. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x+2$

㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1)=|-1|^2=1\in Y$
$f(1)=|1|^2=1\in Y$
$f(2)=|2|^2=4\in Y$

㉡ $g(-1)=-1+2=1\in Y$
$g(1)=1+2=3\in Y$
$g(2)=2+2=4\in Y$

㉢ $h(-1)=|-1|+1=2\in Y$
$h(1)=|1|+1=2\in Y$
$h(2)=|2|+1=3\in Y$

㉣ $i(-1)=i(1)=0\notin Y$

㉤ $j(2)=5\notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

2. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\geq 1)\\ 2x-a & (x\leq 1)\end{cases}$$ 로 정의될 때,

$f(2-\sqrt{3})-f(\sqrt{3})$의 값은?

① $3-3\sqrt{3}$ ② $2-2\sqrt{3}$ ③ $1-\sqrt{3}$

④ $-1+\sqrt{3}$ ⑤ $-3+3\sqrt{3}$

해설

$x=1$에서 함숫값이 1개이어야 하므로

$-1+1=2-a$

$\therefore\ a=2$

$2-\sqrt{3}<1,\ \ \sqrt{3}>1$이므로

$f(2-\sqrt{3})=2(2-\sqrt{3})-2=-2\sqrt{3}+2$

$f(\sqrt{3})=-\sqrt{3}+1$

$\therefore\ f(2-\sqrt{3})-f(\sqrt{3})=-2\sqrt{3}+2-(-\sqrt{3}+1)=1-\sqrt{3}$

3. 함수 $f : A \to B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$

$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

4. 집합 $A = \{1, a, b\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $f = g$일 때, $a + b$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② 2　③ $\frac{1}{3}$　④ -1　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$이어야 하므로
$f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$이다.
따라서 $1, a, b$는 $f(x) - g(x) = 0$의 세 근이다.
즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$의 세 근의 합은

$$1 + a + b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a + b = -\frac{2}{3}$$

5. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$

$a^2+3a-10 = 0,\quad (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

6. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$　　㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$　　㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응

㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.

㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.

그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

7. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore \quad 27 - 6 = 21$(개)

8. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f\ :\ A\ \rightarrow\ B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)=0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)\neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5-2^5=211$

9. $f \circ f$를 f^2, $f \circ f \circ f$를 f^3과 같이 나타낼 때, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$이면 $f^3(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\therefore\ f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f\left((f \circ f)(x)\right)$$

$$= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore\ f^3(2) = 2$$

10. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \ \rightarrow\ X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3,\ (f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$ ($\because f(2) = 3$)
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f \circ g = g \circ f$에서 $2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$

$\therefore \ a = \frac{2}{3}$

12. 함수 $f(x)$가 $f(3x+1)=2x-1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$ ② $f(x)=\dfrac{3x+1}{2}$ ③ $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$
④ $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x)=\dfrac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1)=2x-1$에서 $3x+1=t$ 라고 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore\ f(t)=2\cdot\frac{t-1}{3}-1=\frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{2x-5}{3}$$

13. $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$
② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$
④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때,
$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$3h(x)-2=x+1$, $3h(x)=x+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

14. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

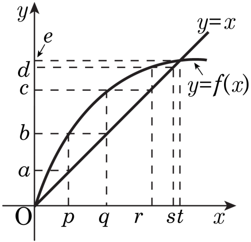
해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore\ f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

15. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

16. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$ ② $a^2 - b^2 > 0$ ③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$ ⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수$f(x)$ 가 역함수를 가지려면
$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로
두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.
$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$

17. $x \neq 1$인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$로 정의된 함수 f에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$에서

$x(y-1) = 2y+1,\ xy - x = 2y+1,\ xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$$\therefore\ y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$$

즉, $a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

18. 집합 $A=\{x\mid x>1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f\circ g$ 가 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x-1}$ 일 때, $(f\circ(g\circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(f\circ(g\circ f)^{-1})=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})=g^{-1}$

$\therefore g^{-1}(3)=k$ 라 하면

$g(k)=3$

$\Rightarrow \sqrt{2}k-1=3\Rightarrow k=5$

19. 일대일 대응인 두 함수 f, g 에 대하여 $f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 일 때, $\dfrac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{8}{3}$

해설

$f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 에서 $f^{-1}(2)=4,\ g(2)=3$

$$(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$$
$$=f^{-1}(2)=4$$

$$\therefore\ \frac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}=\frac{4}{3}$$

20. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \geq 2) \\ 2x+1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x-1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0　② 3　③ 6　④ 8　⑤ 11

해설

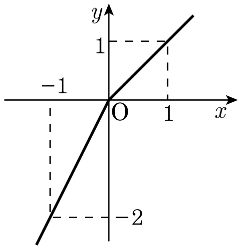
$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \geq 2) \\ 2x+1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x-1$ $g^{-1}(2) = a$ 라고 하면

$g(a) = 2, 3a-1 = 2$

$\therefore$ $a = 1$ 이므로 $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$

$\therefore$ $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $(\because 1 < 2)$

21. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1,1),(-1,-2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10)=f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2)=-1$

㉢ $y=f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡
④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $f(10)=10$
$f(f(10))=f(10)=10$
$\therefore f(10)=f(f(10))$ (참)

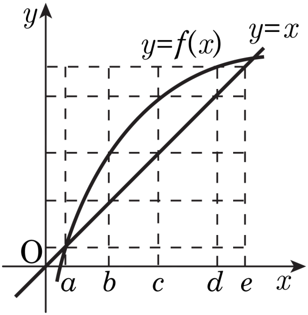
㉡ $f(-1)=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2)=-1$ (참)

㉢ $y=f^-1(x)$의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

22. 함수 $y=f(x)$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a)+f(b)+f(c)-g(d)-g(e)$ 의 값을 구하면?



① a　② c

③ $a+b-c$　④ $a+c-e$

⑤ $a+b+c-d-e$

해설

$f(d)=e, f(c)=d, f(b)=c, f(a)=a$

$\Rightarrow g(a)+f(b)+f(c)-g(d)-g(e)$

$\therefore\ a+c+d-c-d=a$

23. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면

$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$

$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$

즉, $a^2=1,\ a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=-x-3$이고

$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.