1. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$	㉡ $g : x \rightarrow x + 2$
㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$	㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$
㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

2. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 다음 성질을 만족시킨다.

Ⅰ. $f(0)=2,\ f(1)=6$ Ⅱ. $g(n)=f(n+1)$ Ⅲ. $f(n)=2\left\{g(n+1)-g(n-1)\right\}$

이 때, $f(5)$의 값은?

① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

해설

Ⅱ. 에서 $g(n+1)=f(n+2),\ g(n-1)=f(n)$

Ⅲ. 에서 $f(n)=2\left\{f(n+2)-f(n)\right\}$

$\therefore 3f(n)=2f(n+2)$

$f(n+2)=\frac{3}{2}f(n)$

$f(3)=\frac{3}{2}f(1)=\frac{3}{2}\times 6=9$

$f(5)=\frac{3}{2}f(3)=\frac{3}{2}\times 9=\frac{27}{2}$

3. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에
$x = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

4. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x) = -|x|,\ g(x) = -x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다.
② 두 함수는 상등이 아니다.
③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$
④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$
⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
$f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

5. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ 이므로
$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.
만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1$ $\quad \therefore a^4 = 10$
그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는
자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.
$\therefore f(3) = a^2 + 3a$, $f(k) = a^4$
$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$
$a^2 + 3a - 10 = 0$, $(a-2)(a+5) = 0$
$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$
$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$
$\therefore k = 5$
$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

6. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$　　㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$　　㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응
㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.
㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.
그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

7. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

8. 집합 $X=\{-2,\ 0,\ 2\}$, $Y=\{-3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3\}$가 있다. X에서 Y로의 함수 $f\ :\ X \to Y$ 중에서 $f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수 f의 개수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 4 가지
④ 5 가지 ⑤ 6 가지

해설

$f(0)=-f(0)$에서 $f(0)=0$ 이고,
1) $f(-2)=-3,\quad f(2)=3$
2) $f(-2)=-1,\quad f(2)=1$
3) $f(-2)=0,\quad f(2)=0$
4) $f(-2)=1,\quad f(2)=-1$
5) $f(-2)=3,\quad f(2)=-3$
따라서 5 가지이다.

9. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.
합성함수의 정의에 의하여,
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (mx+n)^3 + (mx+n)^2 + mx + n$
$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$
$+2mnx + n^2 + mx + n$
$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$
$+(3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$
$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$
주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로
$m^3 = 8, (m-2)(m^2+2m+4) = 0$
$\therefore m = 2 (\because m$ 은 실수)
$3m^2n + m^2 = -8$ 에 $m = 2$ 를 대입하면
$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$
$\therefore n = -1$
$m = 2, n = -1$ 일 때,
x 의 계수와 상수항도 일치하므로
$\therefore m = 2, n = -1$
$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$

10. $f\left(\dfrac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f\left(\dfrac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때

$\dfrac{2x}{-x+2}=2$ 에서 $2x=2(-x+2)$, $2x=-2x+4$

$\therefore\ x=1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f\left(\dfrac{2}{-1+2}\right)=1-3$

$\therefore\ f(2)=-2$

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $-2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$

$\therefore\ k = -6$

12. $f(x) = 2x + 3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$를 만족시킨다고 한다. 이 때, $g(1)$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 이므로 $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = \frac{1}{2}x$

여기서 $2x + 3 = t$ 라 하면 $x = \frac{t-3}{2}$

$\therefore\ g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t-3}{2}$

$\therefore\ g(1) = -\frac{1}{2}$

13. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}$

해설

$f(h(x)) = \dfrac{h(x)-1}{h(x)+2} = \dfrac{x+1}{x-1} = g(x)$

$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$

$2h(x) = -3x-1$

$\therefore\ h(x) = \dfrac{-3x-1}{2}$

$\therefore\ h(2) = -\dfrac{7}{2}$

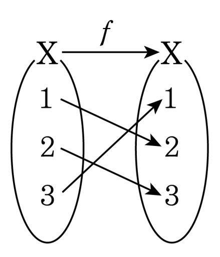
해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$f(a) = 3$, $\dfrac{a-1}{a+2} = 3$

이를 풀면 $\therefore\ a = h(2) = -\dfrac{7}{2}$

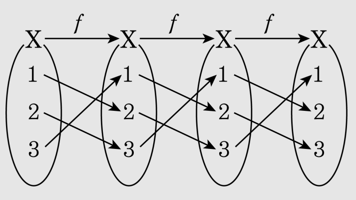
14. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f \ : \ X \ \rightarrow X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$의 값은?

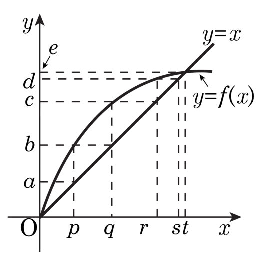
① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면
$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$
같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.
$\therefore f^3(x) = x$ 이므로
$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,
$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$
$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2$, $f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$
$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

15. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

16. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

17. 함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3(x \geq -1)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+a} - b$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 + 2x + 3$

$\Rightarrow y - 2 = (x+1)^2$

$\Rightarrow (y+1)^2 = x - 2$

$\Rightarrow y = \sqrt{x-2} - 1 \cdots f^{-1}(x)$

$\therefore a + b = -1$

18. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2+3) = f(2) = 2+5 = 7$
$f^{-1}(2) = t$ 라 하면 $f(t) = 2$
그런데 $x+5 \geq 5$ $(\because\ x \geq 0)$ 이고
$-x^2+3 < 3$ $(\because\ x < 0)$ 이므로 $-t^2+3 = 2$
$\therefore\ t = f^{-1}(2) = -1$ $(\because\ t < 0) \cdots$ ㉠
따라서 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$

19. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f \circ g)(x) = h(x)$ 라 하자.

$h(x) = f(g(x)) = 2(x+2) - 1 = 2x + 3$

$h(x)$ 의 역함수를 구하면

$y = 2x + 3$

$\Rightarrow \quad x = 2y + 3$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$\therefore \quad h^{-1}(-2) = -\frac{5}{2}$

20. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x\geq 0)\\ 1-x^2 & (x<0)\end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3)+f^{-1}(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f^{-1}(3)=b$ 라고 하면 $f(b)=3$ 에서 $2b+1=3$

$\therefore\ b=1$

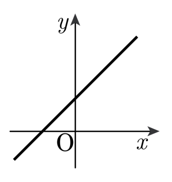
이 때, $f^{-1}(3)+f^{-1}(a)=0$ 에서

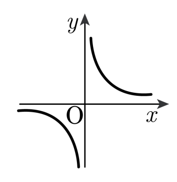
$1+f^{-1}(a)=0,\ f^{-1}(a)=-1$

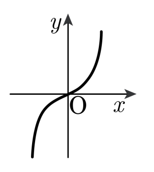
$\therefore\ f(-1)=a$

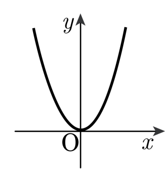
$\therefore\ a=1-(-1)^2=0$

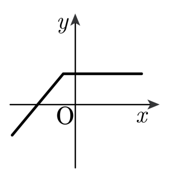
21. 다음 중 임의의 실수 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

①


②


③


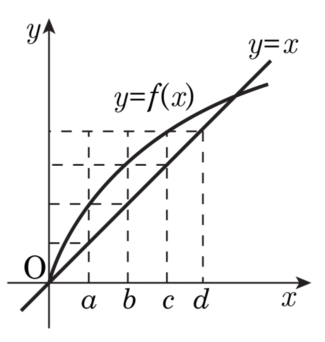
④


⑤


해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$이다.
그런데 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족하려면
함수 $f(x)$는 일대일 대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이어야 한다.

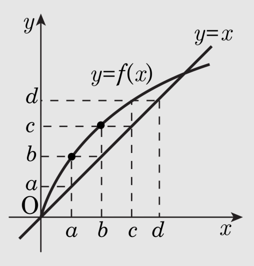
22. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b　　② $b+d$　　③ $2b+c$

④ $b+c+d$　　⑤ $a+b+c$

해설



그림에서 $f(b)=c,\ f^{-1}(b)=a$ 이므로

$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$

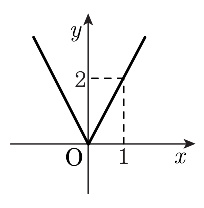
23. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

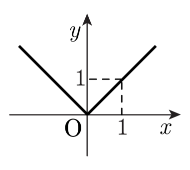
① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

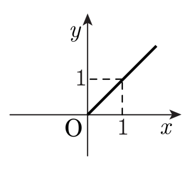
해설

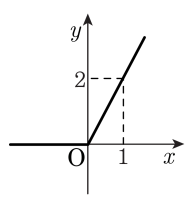
$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1,\ a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.

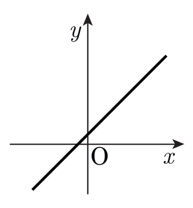
24. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

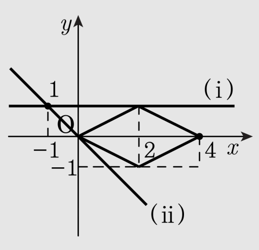
$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

25. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼
평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

26. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① P(-2)　② P(-1)　③ P(0)
④ P(1)　⑤ P(2)

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$
$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 P(1) 이다.