

1. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f: x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g: x \rightarrow x + 2$

㉢ $h: x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i: x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j: x \rightarrow |x| + 3$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

2. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 다음 성질을 만족시킨다.

$$\text{I. } f(0) = 2, f(1) = 6$$

$$\text{II. } g(n) = f(n+1)$$

$$\text{III. } f(n) = 2 \{g(n+1) - g(n-1)\}$$

이 때, $f(5)$ 의 값은?

① $\frac{27}{2}$

② $\frac{25}{2}$

③ $\frac{23}{2}$

④ $\frac{21}{2}$

⑤ $\frac{19}{2}$

해설

$$\text{II. 에서 } g(n+1) = f(n+2), g(n-1) = f(n)$$

$$\text{III. 에서 } f(n) = 2 \{f(n+2) - f(n)\}$$

$$\therefore 3f(n) = 2f(n+2)$$

$$f(n+2) = \frac{3}{2}f(n)$$

$$f(3) = \frac{3}{2}f(1) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

$$f(5) = \frac{3}{2}f(3) = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$$

3. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1) + 1) &= g(0) = f((-1) - 1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

4. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = -|x|$, $g(x) = -x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다.

② 두 함수는 상등이 아니다.

③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$

④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$

⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$$f(-1) = g(-1) = -1 \quad f(0) = g(0) = 0$$

$$f(1) = g(1) = -1$$

따라서 두 함수는 상등이다.

5. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

6. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$

㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$

㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응

㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.

㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.

그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

7. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

8. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

9. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.

합성함수의 정의에 의하여,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$$

$$+ 2mnx + n^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$$

$$+ (3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$$

$$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$\therefore m = 2 (\because m \text{ 은 실수})$$

$$3m^2n + m^2 = -8 \text{ 에 } m = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$$

$$\therefore n = -1$$

$$m = 2, n = -1 \text{ 일 때,}$$

x 의 계수와 상수항도 일치하므로

$$\therefore m = 2, n = -1$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$$

10. $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x \text{ 일 때}$$

$$\frac{2x}{-x+2} = 2 \text{ 에서 } 2x = 2(-x+2), 2x = -2x+4$$

$$\therefore x = 1$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f\left(\frac{2}{-1+2}\right) = 1 - 3$$

$$\therefore f(2) = -2$$

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } -2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$$

$$\therefore k = -6$$

12. $f(x) = 2x + 3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킨다고 한다.
이 때, $g(1)$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로 } (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{여기서 } 2x + 3 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2}$$

13. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

① $\frac{7}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $-\frac{7}{2}$

⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

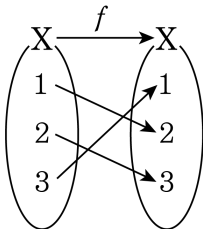
해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$$f(a) = 3, \quad \frac{a-1}{a+2} = 3$$

이를 풀면 $\therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$

14. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

① -2

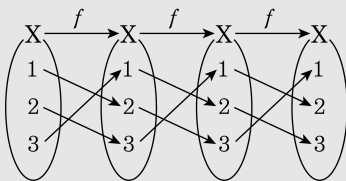
② 2

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.

$\therefore f^3(x) = x$ 이므로

$$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x),$$

$$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$$

$$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2, f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$$

15. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

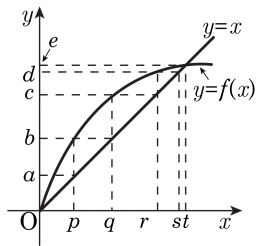
① p

② q

③ r

④ s

⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{7}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

16. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

17. 함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3 (x \geq -1)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+a} - b$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$y = x^2 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow y - 2 = (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 = x - 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x - 2} - 1 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\therefore a + b = -1$$

18. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2 + 3) = f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{-1}(2) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 2$$

그런데 $x+5 \geq 5$ ($\because x \geq 0$) 이고

$$-x^2+3 < 3 \text{ ($\because x < 0$) } \text{ 이므로 } -t^2+3 = 2$$

$$\therefore t = f^{-1}(2) = -1 \text{ ($\because t < 0$)} \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$$

19. 두 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$(f \circ g)(x) = h(x)$ 라 하자.

$$h(x) = f(g(x)) = 2(x + 2) - 1 = 2x + 3$$

$h(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x = 2y + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore h^{-1}(-2) = -\frac{5}{2}$$

20. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x \geq 0) \\ 1 - x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) +$

$f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$

$\therefore b = 1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

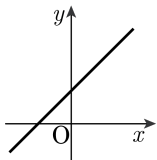
$1 + f^{-1}(a) = 0, f^{-1}(a) = -1$

$\therefore f(-1) = a$

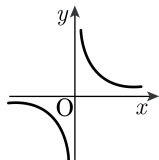
$\therefore a = 1 - (-1)^2 = 0$

21. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

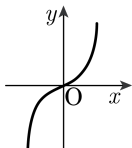
①



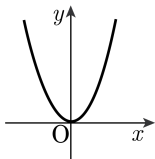
②



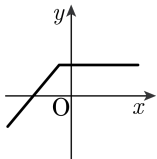
③



④



⑤



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

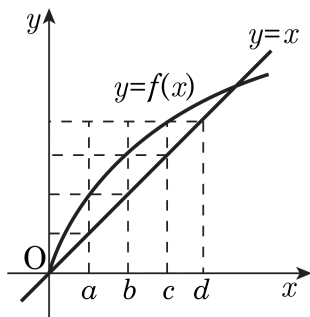
그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면

함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고

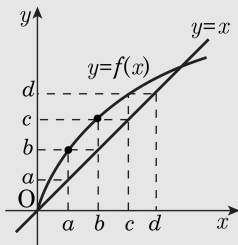
$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

22. $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b + f(b) + f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



- ① b ② $b + d$ ③ $2b + c$
 ④ $b + c + d$ ⑤ $a + b + c$

해설



그림에서 $f(b) = c$, $f^{-1}(b) = a$ 이므로
 $b + f(b) + f^{-1}(b) = b + c + a$

23. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

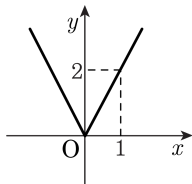
즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

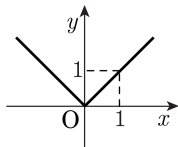
$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.

24. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

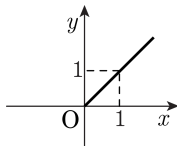
①



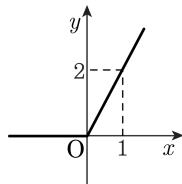
②



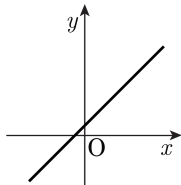
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

25. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는

$x+2y=2$ 의 그래프에서

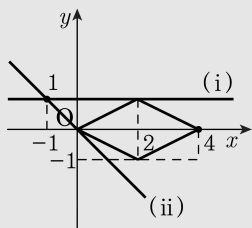
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한

것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

26. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?

① $P(-2)$

② $P(-1)$

③ $P(0)$

④ $P(1)$

⑤ $P(2)$

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$$

$y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(1)$
이다.

