1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

2. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

3. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······ ㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······ ㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······ ㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

4. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 세 근 : $2-i,\ 2+i,\ \alpha$
세 근의 합 : $-a=4+\alpha \cdots ①$
세 근의 곱 : $-5=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$
$\therefore \alpha=-1$, ①식에 대입하면 $a=-3$
$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot(-1)+(2-i)\cdot(-1)=5-4=1$
$\therefore a^2+b^2=10$

5. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,

$\omega^3=1,\ \ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도

$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

㉠ $\omega^3=1,\ \ (\omega^3)^2=1\rightarrow$(○)

㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$,

$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$

$\omega^2+\omega+1$을 이용.

$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2\rightarrow$(○)

㉡ 두 근 $\omega, \overline{\omega}$의 합은

$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로

$\omega+\overline{\omega}=-1$

㉣ $\omega^2+\omega+1=0$,

$\omega^2+\omega=-1\rightarrow$(○)