1. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

2. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2) + a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$　　② $a \geq 4$　　③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$　　⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면
$x^2 - kx + (2k - a) = 0$
실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.
$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$
$k^2 - 8k + 4a \geq 0$
위 부등식을 k에 대하여 정리하면
$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$
실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$이거나,
$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.
따라서 $a \geq 4$

4. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq-\frac{25}{8}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

5. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.
$D' = 2^2-(ka-2k+b)=0$
$\Rightarrow \quad (2-a)k+4-b=0$
모든 k에 대하여 성립하려면
$a=2,\ b=4$
$\therefore\ a+b=6$

6. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = 2a$ $\cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4$ $\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

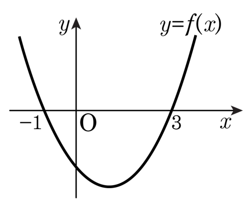
7. $x^2-2kx+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^3+\beta^3=2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=1$이므로
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2$에서
$(2k)^3-3\cdot1\cdot2k=2$
$4k^3-3k-1=0,\ (k-1)(4k^2+4k+1)=0,$
$(k-1)(2k+1)^2=0$
$\therefore\ k=1,\ -\frac{1}{2}$
$\therefore\ k$값들의 합은 $\frac{1}{2}$

8. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1)=a(2x-1+1)(2x-1-3)=4ax(x-2)$이므로

$f(2x-1)=0$에서

$4ax(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 두 근의 합은 2이다.