1. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

2. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2
④ 4　⑤ $2+2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2+\sqrt{3}$ 대입
$(2+\sqrt{3})^2 - a \cdot (2+\sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4-a) + (b-2a+7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$ ② $a \geq 4$ ③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$ ⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2 - kx + (2k - a) = 0$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.

$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$

$k^2 - 8k + 4a \geq 0$

위 부등식을 k에 대하여 정리하면

$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\dfrac{D}{4} \leq 0$이거나,

$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.

따라서 $a \geq 4$

4. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

5. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2-(ka-2k+b)=0$

$\Rightarrow \quad (2-a)k+4-b=0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a=2, \; b=4$

$\therefore \; a+b=6$

6. 이차함수 $y=x^2+ax+2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$ 일 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha<\beta)$ 이라 하면
α,β 는 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=2a \quad \cdots ㉠$
이 때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$ 이므로
$\beta-\alpha=2$ 양변을 제곱하면
$(\beta-\alpha)^2=4$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4 \quad \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2-8a-4=0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

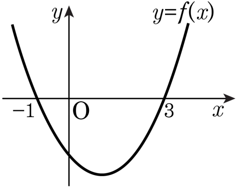
7. $x^2 - 2kx + 1 = 0$의 해를 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 1$이므로
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 2$에서
$(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$
$4k^3 - 3k - 1 = 0,\ (k-1)(4k^2 + 4k + 1) = 0,$
$(k-1)(2k+1)^2 = 0$
$\therefore\ k = 1,\ -\frac{1}{2}$
$\therefore\ k$값들의 합은 $\frac{1}{2}$

8. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$의 두 근의 합은?



① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a > 0)$으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$이므로
$f(2x-1) = 0$에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2이다.