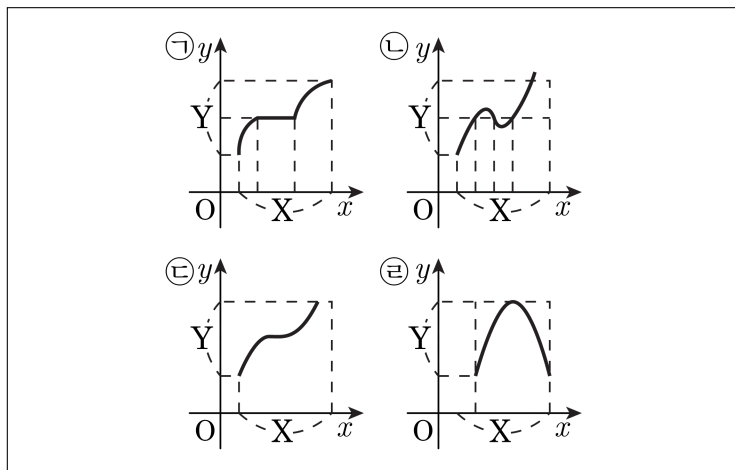


1. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣

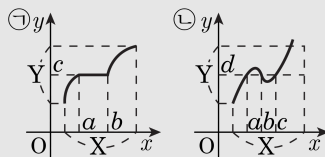
③ ㉢

④ ㉠

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



㉠: $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡: a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일대응이 아니다.

㉢: ㉡의 경우와 같다.

2. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$)의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역}$$

$\{y|y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

3. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고

$g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로

$$f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$$

4. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

5. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 7$ 일 때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
 $g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) &= (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) \\ &= f^{-1}(2) \end{aligned}$$

$(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$

그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로

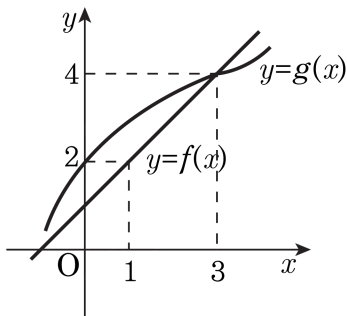
이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.

따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
 $4a^2 = 1$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$$

6. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) &= g^{-1}(f(1)) + 4 \\ &= g^{-1}(2) + 4\end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$

문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가

$(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$

이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

7. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$$

$$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$