1. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α와 β이므로

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2$이다.

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}$

2. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.
두 근의 합 : 2,
두 근의 곱 : 2
$\therefore \ a=-2, \ b=2$

3. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

4. 이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha+\beta=3$	㉡ $\alpha^2+\beta^2=6$
㉢ $\alpha\beta=-3$	㉣ $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=2$
㉤ $(\alpha-1)(\beta-1)=\dfrac{1}{2}$	

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

㉠ $\alpha+\beta=3$ (○)

㉡ $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2\cdot\dfrac{3}{2}=6$ (○)

㉢ $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}\neq-3$ (×)

㉣ $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9-4\cdot\dfrac{3}{2}=3\quad|\alpha-\beta|=\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\neq 2$ (×)

㉤ $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\dfrac{3}{2}-3+1=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$ (×)

5. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$
$f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$
따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2}$, $\dfrac{\beta-1}{2}$
이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$
$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

6. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3\pm\sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a}=-4\cdot 7=-28,\ c=-28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a}=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6,\ b=6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2+6ax-28a=0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

7. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$
② $x^2+5x+3=0$
③ $x^2+5x+13=0$
④ $x^2+5x-13=0$
⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b' 이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$이므로 켤레근인 $3 - \sqrt{2}$도 근이 된다.
이차방정식의 두 근의 합이 $-a$이므로,
$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore\ a = -6$
두근의 곱이 b이므로
$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore\ b = 7$
$\therefore\ a + b = -6 + 7 = 1$

9. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.