

1. 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{6}$

④ $\frac{2}{5}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α 와 β 이므로
 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 2$ 이다.

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{2}$$

2. 한 근이 $1 - i$ 인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1 - i$ 이면 다른 한 근은 $1 + i$ 이다.

두 근의 합 : 2,

두 근의 곱 : 2

$\therefore a = -2, b = 2$

3. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

4. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha + \beta = 3$

㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 6$

㉢ $\alpha\beta = -3$

㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 2$

㉤ $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{2}$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

㉠ $\alpha + \beta = 3$ (○)

㉡ $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (○)

㉢ $\alpha\beta = \frac{3}{2} \neq -3$ (×)

㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta\alpha}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 3 \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{3}$$

$\therefore \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \neq 2$ (×)

㉤ $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{3}{2} - 3 + 1 = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ (×)

5. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$$2x+1 = \alpha \text{ 또는 } 2x+1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta-1}{2}$$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

$$\text{이때 두 근의 합 } \frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

6. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

7. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a 를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b 를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$

② $x^2 + 5x + 3 = 0$

③ $x^2 + 5x + 13 = 0$

④ $x^2 + 5x - 13 = 0$

⑤ $x^2 + 5x + 15 = 0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a 를 a' ,
주현이가 잘못 본 상수항 b 를 b' 이라 하자.

$x^2 + a'x + b = 0$ 의 두 근이 1, 3이므로

$$b = 1 \times 3 = 3$$

$x^2 + ax + b' = 0$ 의 두 근이 -1, -4이므로

$$-a = (-1) + (-4) = -5$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 처음의 이차방정식은 $x^2 + 5x + 3 = 0$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$ 이므로 켄레근인 $3 - \sqrt{2}$ 도 근이 된다.

이차방정식의 두 근의 합이 $-a$ 이므로,

$$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore a = -6$$

두근의 곱이 b 이므로

$$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = -6 + 7 = 1$$

9. 이차방정식 $x^2 - (p+4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근의 차가 2가 되는 q 의 최솟값은 ?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2 - (p+4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라고 하면

$$|\alpha + 2 - \alpha| = \frac{\sqrt{(p+4)^2 - 4(q-2)}}{1} = |2|$$

$$\sqrt{p^2 + 8p + 16 - 4q + 8} = 2$$

양변을 제곱하여 q 에 관해 정리하면

$$4 = p^2 + 8p + 16 - 4q + 8, 4q = p^2 + 8p + 20$$

$$q = \frac{1}{4}p^2 + 2p + 5 = \frac{1}{4}(p+4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = p + 4, \alpha\beta = q - 2$$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = 2$$

$$\sqrt{(p+4)^2 - 4(q-2)} = 2$$

양변을 제곱하면

$$(p+4)^2 - 4(q-2) = 4$$

q 에 대해 정리하면

$$q = \frac{1}{4}(p+4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.