1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2 ② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2 ④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0,\ (x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

4. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore\ y = 0$

$y = 0$을 ㉢에 대입하면 $x = -5$

$\therefore\ x = -5,\ y = 0$

5. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$　　② $(-2, 3)$　　③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$　　⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$
$\therefore$ $y = 2$를 ㉣ 대입하면 $x = 3$
$\therefore$ $x = 3$, $y = 2$

6. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

7. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

8. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

9. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore$ $a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$ 을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

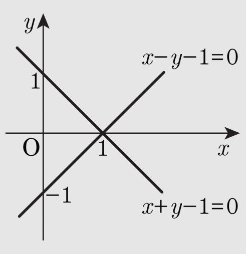
$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

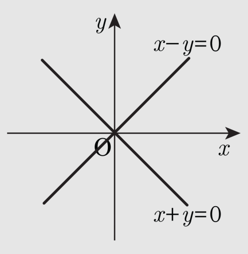
11. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개
④ 2 개 ⑤ 4 개

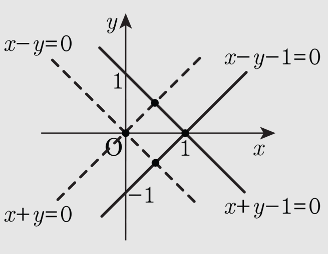
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

12. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ____________ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

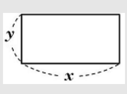
13. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots ㉠$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17,\ 2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

14. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h　② 9 km/h　③ 10 km/h
④ 11 km/h　⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x + y = 200$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$m/분

$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}$/분$= \frac{0.4\text{ km}}{3} \times 60$/시간$= 8$ km/h

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

ⅰ) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ⅱ) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

ⅰ), ⅱ)에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

17. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

18. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

19. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$
$(m-4)(n-2)=8$
$8=1\times8=2\times4=4\times2=8\times1$이므로
$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$
$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

20. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha,\ y = \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy + 2x - 3y = 10,\ xy + 2x - 3y - 6 = 4,$

$(x - 3)(y + 2) = 4$

$y + 2 \geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x - 3 = 1,\ y + 2 = 4$

$\therefore\ x = 4,\ y = 2$

21. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$　② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$
③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$　④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$
⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\
 & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\
\hline
 & 1 & 2a+4 & -4a-1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\{x^2+2(a+2)x-4a-1\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

22. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3,b=2,c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
∴구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

23. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$이 $x = -1 + \sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a - b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
$\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
$= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
$\therefore\ 2 + c = 5,\ 4 + 2c = a,\ 10 - c = b$
$\therefore\ a = 10,\ b = 7,\ c = 3$

24. 두 방정식 $x^2-(k+2)x+2k=0$, $x^2+kx-2k=0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재할 때, 상수 k의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통인 근을 α라 하면
$\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$
$\alpha^2+k\alpha-2k=0$
두 식을 더하면
$2\alpha^2-2\alpha=0$, $\alpha(\alpha-1)=0$
$\alpha=0$ 이면 $k=0$
$\alpha=1$ 이면 $k=1$
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

해설

㉠ : $x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$
㉡ : $x^2+kx-2k=0$
ⅰ) $x=k$ 가 ㉡의 해일 때
$k^2+k^2-2k=0$,
$k^2-k=0$
$k=1$ 또는 $k=0$
ⅱ) $x=2$가 ㉡의 해일 때
$4+2k-2k=0$, $4=0$ 성립하지 않는다.
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

25. 실수 x, y에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$일 때, xy의 값은?

① -6　　② -3　　③ 0　　④ 3　　⑤ 6

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D = (y+1)^2 - 2\left(y^2 - 2y + 5\right) \geq 0$
$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y = 3$
$y = 3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2 + 8x + 8 = 0, \ x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$\therefore \ x = -2 \ \ \therefore \ xy = (-2) \cdot 3 = -6$