

1. 원 $x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?

- ① 반지름의 길이가 2 인 원이다.
- ② 원의 중심은 y 축 위에 있다.
- ③ 원은 두 점 $(0, -2), (0, 2)$ 를 지난다.
- ④ 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 존재한다.
- ⑤ 원은 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ 을 변형하면
 $(x - k)^2 + y^2 = 4 + k^2$ 이므로
 $x = 0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2 = 4$
 $\therefore y = \pm 2$
따라서 주어진 원은
 $(0, -2), (0, 2)$ 의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

2. 점 (5, 1)과 (-1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$ ② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$ ④ $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 21$

⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 C(2,4)

구하는 원의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

3. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

4. 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면

$$(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$$

$$\therefore A + B - C = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore A + B + C = -2 \cdots \text{㉡}$$

$$0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore B + C = -1 \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$A = -1, B = 1, C = -2$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

5. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5-k$$

여기서, $5-k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

6. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면 제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면 중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 (2, 1) 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

7. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

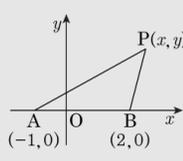
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



9. $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$ 이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

- ① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

$$\text{준식} = x^2 + 2ax + y^2 - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+a)^2 + (y-2a)^2 = a^2 - 2a + 4$$

그러므로 준식은 중심 $(-a, 2a)$ 이고

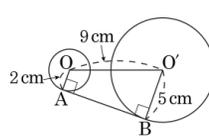
반지름이 $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$ 이다.

$$\therefore \text{면적 } S = \pi(\sqrt{a^2 - 2a + 4})^2$$

$$= \pi(a^2 - 2a + 4) = \pi(a-1)^2 + 3\pi$$

$\therefore a = 1$ 일 때 최소 면적 : 3π

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2cm, 5cm 인 두 원 O, O' 의 중심 사이의 거리가 9cm 일 때, 공통외접선 \overline{AB} 의 길이는?



- ① $6\sqrt{2}$ cm ② 8 cm ③ $5\sqrt{2}$ cm
 ④ 7 cm ⑤ $4\sqrt{3}$ cm

해설

다음 그림에서 점 O에서 $\overline{BO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\overline{AO} = \overline{BH}$
 $\therefore \overline{O'H} = 5 - 2 = 3$
 따라서 $\triangle OHO'$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여
 $\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ cm

