1. 원 $x^2+y^2-2kx-4=0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?

① 반지름의 길이가 2 인 원이다.

② 원의 중심은 y 축 위에 있다.

③ 원은 두 점 $(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$를 지난다.

④ 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

⑤ 원은 점 $(1,\ 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2+y^2-2kx-4=0$ 을 변형하면
$(x-k)^2+y^2=4+k^2$ 이므로
$x=0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2=4$
$\therefore y=\pm 2$
따라서 주어진 원은
$(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

2. 점 (5, 1)과 (−1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=12$ ② $(x-2)^2+(y-1)^2=15$

③ $(x-2)^2+(y-4)^2=18$ ④ $(x-2)^2+(y-6)^2=21$

⑤ $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 $C(2,4)$

구하는 원의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}=\sqrt{18}$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2=18$

3. $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-3,1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3\cdot x+1\cdot y=10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

4. 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-x+y-2=0$
② $x^2+y^2-2x+3y-4=0$
③ $x^2+y^2+x-4y-5=0$
④ $x^2+y^2+3x-y-1=0$
⑤ $x^2+y^2-2x+4y-2=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$으로 놓으면
이 원이 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$ 을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
$(-1)^2+(-1)^2+\mathrm{A}\cdot(-1)+\mathrm{B}\cdot(-1)+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}=2 \cdots$ ㉠
$1^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 1+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2 \cdots$ ㉡
$0^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{B}+\mathrm{C}=-1 \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$\mathrm{A}=-1,\ \mathrm{B}=1,\ \mathrm{C}=-2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+y-2=0$

5. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\qquad), k < (\qquad\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

6. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

7. 두 점 $A(-1,\ 0), B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2:1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

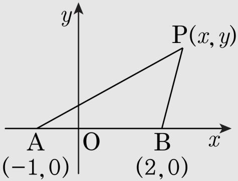
그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



8. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

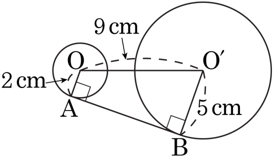
반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2 cm, 5 cm 인 두 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리가 9 cm 일 때, 공통외접선 $\overline{AB}$ 의 길이는?

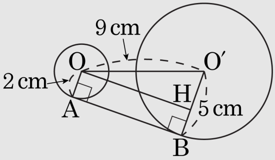


① $6\sqrt{2}$ cm ② 8 cm ③ $5\sqrt{2}$ cm

④ 7 cm ⑤ $4\sqrt{3}$ cm

해설

다음 그림에서 점 O에서 $\overline{BO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$\overline{AO} = \overline{BH}$

$\therefore \overline{O'H} = 5 - 2 = 3$

따라서 $\triangle OHO'$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ cm