1. $y = x^2 - 2$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은?

① $y = -x^2 + 2$ ② $y = -x^2 + 3$ ③ $y = x^2 + 2$

④ $y = 2x^2 + 2$ ⑤ $y = 3x^2 + 2$

해설

$y = ax^2 + b$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식

$y = -ax^2 - b$

$y = x^2 - 2$ 를

x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은

$-y = x^2 - 2$

$\therefore y = -x^2 + 2$

2. 다음 중 집합이 될 수 없는 것은?

① $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$

② 한글 자음의 모임

③ $\{x \mid x$는 $x \times 0 = 0$을 만족하는 자연수$\}$

④ 키가 나보다 큰 사람들의 모임

⑤ 나보다 착한 학생의 모임

해설

⑤, '나보다 착한 학생' 은 그 대상을 분명히 알 수 없으므로 집합이라고 할 수 없다.

3. 두 집합 $A=\left\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\right\}$, $B=\{a,\ b, \{c,\ \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A)+n(B)$를 구하여라.

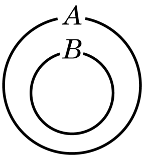
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=\left\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\right\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이므로
$n(A)=4$ 이고, $n(B)=3$ 이므로 $n(A)+n(B)=7$ 이다.

4. 다음 벤 다이어그램에서 집합 $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 것을 모두 고르면?



① $\{\varnothing\}$　② $\{5, 10\}$　③ $\{5, 15, 20\}$

④ $\{32\}$　⑤ $\{5, 50 \cdots\}$

해설

$B \subset A$ 이어야 한다.

①$\varnothing \notin A$ 이므로 $\{\varnothing\} \not\subset A$

5. 집합 $A = \{x|x$는 24의 약수$\}$ 의 부분집합 중 6 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

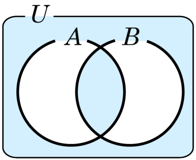
▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{x|x$는 24의 약수$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이고,
이 중 6 의 약수는 $1, 2, 3, 6$ 이다.
따라서 6 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{8-4} = 16$ (개)

6. 다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

② $(A \cup B) \cup (A \cap B)$

③ $(A \cap B) \cup (A^c - B^c)$

④ $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$

⑤ $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

해설

벤다이어그램은 $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 을 나타낸다. $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

7. 전제집합 U 의 부분집합 A, B 에서 집합 $(A \cup B) \cap (A - B)^c$ 을 간단히 한 것은?

① $\varnothing$ ② A ③ B ④ U ⑤ $A \cap B$

해설

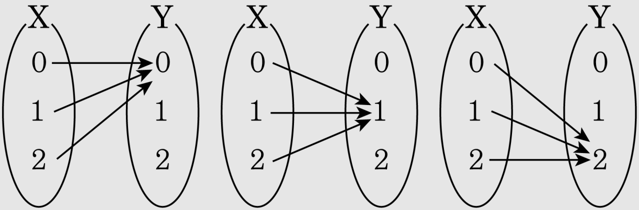
$$(A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) = B$$

8. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

9. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ ② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

10. 집합 $U=\{1,2,3,4,6,12\}$에 대하여 $X \subset U$ 이고, $\{1,2\} \cap X = \varnothing$을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하시오.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 16 개

해설

$\{1,2\}$를 포함하지 않아야 하므로 $\{3,4,6,12\}$의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^4 = 16$(개)

11. 다음 다섯 개의 명제 중 참인 명제의 개수는? (단, a, b, c는 실수)

㉠ $|a| + |b| = 0 \leftrightarrow ab = 0$

㉡ $a < b$ 이면 $ac < bc$ 이다.

㉢ $a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.

㉣ $a + b\sqrt{3} = 0$ 이면 $a = 0$ 그리고 $b = 0$

㉤ $a < b$ 이면 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $|a| + |b| = 0 \leftrightarrow a = b = 0 \nleftrightarrow ab = 0$
㉡ $c \leq 0$ 인 경우 성립하지 않는다.
㉢ 반례 : $a = -1, b = 0$
㉣ 반례 : $a = \sqrt{3}, b = -1$ (a, b 가 유리수일 때 명제가 성립한다.)
㉤ 반례 : $a = -1, b = 1$ (a, b 가 같은 부호일 때 성립한다.)

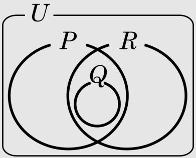
12. 전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $Q \subset (P \cap R)$ 가 성립한다. 이때, 다음 중 항상 참인 명제를 모두 고르면?

① $p \rightarrow r$ ② $\sim p \rightarrow \sim q$ ③ $r \rightarrow q$

④ $q \rightarrow r$ ⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

세 집합 P, Q, R 에 대하여 $Q \subset (P \cap R)$ 를 만족하도록 벤 다이어그램을 그리면 다음 그림과 같다.



이때, $P^c \subset Q^c, Q \subset R$ 이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$

13. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3,\ (f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1\ (\because f(2) = 3\ )$
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

14. 두 함수 $f(x)=2x-5, g(x)=-6x+2$ 에 대하여 $(k\circ f)(x)=g(x)$를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x+17$ ② $-3x-13$ ③ $-3x+13$

④ $-3x$ ⑤ $-5x+10$

해설

$(k\circ f)(x)=g(x)$

$(k\circ f\circ f^{-1})(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

$k(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

$f(x)=2x-5$에서

$y=2x-5\ ,\ \dfrac{y+5}{2}=x$

$x=\dfrac{y}{2}+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})(x)=-6\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}\right)+2=-3x-13$

15. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $g(f^{-1}(-3))$ 의 값을 구하여라. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f^{-1}(-3) = k$라 놓으면
$f(k) = -3$이므로 $k = -1$이다.
그러므로 $g(f^{-1}(-3)) = g(-1) = 2$

16. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수f^{-1} 가$f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

17. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

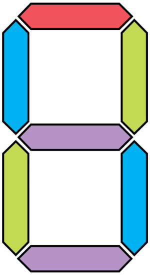
㉠ $f(x) = x + 2$	㉡ $f(x) = -x - 1$
㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

18. 다음 그림과 같이 빨강, 초록, 파랑, 보라 4개의 전등으로 구성된 숫자판이 있다. 세 집합 A, B, C가 각각 다음과 같을 때, $\square$ 안에 기호 $\subset$, $=$ 중 알맞은 것을 차례대로 써넣어라.



$A = \{x \mid x$ 는 숫자 4를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$ $B = \{x \mid x$ 는 숫자 5를 나타낼 때 켜지는 전등의 색$\}$ $C = \{x \mid x$ 는 숫자 6을나타낼 때 켜지는 전등의 색 $\}$

$A \square C$

$B \square C$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\subset$

해설

집합 A, B, C를 각각 원소나열법으로 나타내면

$A = \{$파랑 , 보라 , 초록$\}$,

$B = \{$빨강 , 파랑 , 보라$\}$,

$C = \{$빨강 , 파랑 , 보라 , 초록$\}$ 이다.

따라서 $A \subset C, B \subset C$ 이다.

19. 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $A \cup B = B \cup A$

② $B \subset A$이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \varnothing$

④ $B \cap \varnothing = \varnothing$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

20. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2\geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy)\geq 0$

$\therefore(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2\geq\lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy\leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

21. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+4y^2+4xy+10x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=20,\ b>25$　② $a=20,\ b<25$
③ $a=20,\ b\geq 25$　④ $a=20,\ b\leq 25$
⑤ $a=20,\ b\neq 25$

해설

준식을 x에 관하여 정리하면
$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0\cdots$ ㉠
㉠이 x의 모든 실수값에 대하여 성립하려면
$$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$$
$\therefore\ (a-20)y+b-25>0\cdots$ ㉡
㉡이 모든 y에 대하여 성립하려면 $a=20$이고 $b>25$이다.

22. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \;\rightarrow\; a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \;\; (x \in R,\;\; a \in R)$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　② $a \le -1$　③ $a > -1$
④ $a < 1$　⑤ $a \le 1$

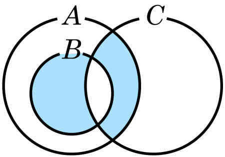
해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\; x < 1$ 인 경우로 나누면,
$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$
$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\;\; f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.
즉, $-2(a-1) > 0,\; a-1 < 0$
$\therefore\;\; a < 1$

23. 다음 벤 다이어그램에서 $n(A)=20$, $n(B)=10$, $n(C)=15$, $n(B\cup C)=21$, $n(A\cup B\cup C)=25$ 일 때, 빗금 친 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$B\subset A$ 이므로 $A\cup B\cup C=A\cup C$ 이다.

$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)\rightarrow n(A\cap C)=10$
,
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)\rightarrow n(B\cap C)=4$,

빗금 친 부분은 $(B-C)\cup((A\cap C)-(B\cap C))$ 이므로,

$n((B-C)\cup((A\cap C)-(B\cap C)))=n(B)-n(B\cap C)+n(A\cap C)-n(B\cap C)=10-4+10-4=12$

24. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \dfrac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \to q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(i) $x < 0$이면

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$$

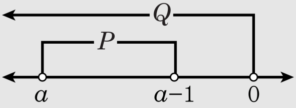
$\therefore \quad x + \dfrac{1}{x} \le -2$

(ii) $x > 0$이면

$x + \dfrac{1}{x} \ge 2$이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$\therefore \quad P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$



따라서, $p \to q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

25. p, q 가 실수일 때, 다음 중 부등식 $p<q$ 가 성립할 필요충분조건은?

① $\{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$

② $\{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$

③ $\{x|x < p\} \subset \{x|x < q\}$

④ $\{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$

⑤ $\{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$

해설

① $p<q$ $\overset{\mathrm{O}}{\underset{\mathrm{X}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$

(반례) $p=q$ $\therefore$ 충분조건

② $p<q$ $\overset{\mathrm{O}}{\underset{\mathrm{X}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$

(반례) $p=q$ $\therefore$ 충분조건

③ $p<q$ $\overset{\mathrm{O}}{\underset{\mathrm{X}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x < p\} \subset \{x|x < p\}$

(반례) $p=q$ $\therefore$ 충분조건

④ $p<q$ $\overset{\mathrm{O}}{\underset{\mathrm{X}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$

(반례)$p=q$ $\therefore$ 충분조건

⑤ $p<q$ $\overset{\mathrm{O}}{\underset{\mathrm{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$

$\therefore$ 필요충분조건