1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$　② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$　④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$

⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$ 의 꼴이어야 한다.

2. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

> ㉠ $f(2n) = 2 \cdot f(n)(n = 1, 2, 3, \cdots)$
>
> ㉡ $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

이 때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

3. 함수 f가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$f(0+0) = f(0) + f(0),\ f(0) = 2f(0)$
$\therefore\ f(0) = 0$

4. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에서 $Y = \left\{y \mid y\text{는실수}\right\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$　　② $g(x) = |x| + 1$　　③ $g(x) = x^2 + 1$

④ $g(x) = x^3 + 1$　　⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함숫값만 같으면 두 함수는 서로 같다.

$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$

① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$

⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

5. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여
$f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고
$f(-1) = -a + b,\ f(4) = 4a + b$ 이므로
치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.
그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로
$-a + b = -5,\ 4a + b = 10$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 3,\ b = -2$
$\therefore 2a + b = 4$

6. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?(단, R는 실수 전체의 집합이다.)

① 항등함수는 일대일 대응이다.

② $f : R \rightarrow R$가 항등함수이면 $f(x) = x$이다.

③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$가 된다.

④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.

⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$이다.
(반례) $f : X \rightarrow Y,\ f(x) = x$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\},\ Y = \{1,\ 2,\ 3\}$이면
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$가 아니다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 무수히 많다.
⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f : X \rightarrow Y,\ f(x) = 3$에서
$X = \{1,\ 2,\ 3\}$이면 $y = f(x)$는 직선이 아니다.
따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

7. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 27　② 30　③ 33　④ 36　⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a=3\times3\times3=27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b=3\times2\times1=6$
$\therefore a+b=27+6=33$

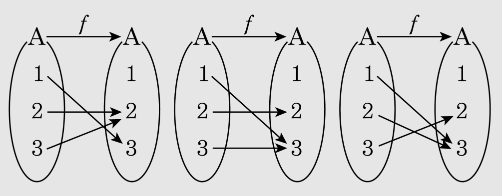
8. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$ Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개