

1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

2. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} f(2n) = 2 \cdot f(n) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\textcircled{\text{㉡}} f(2n + 1) = (-1)^n \cdot 2 (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

3. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

4. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 $Y = \{y \mid y \text{는 실수}\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$ ② $g(x) = |x| + 1$ ③ $g(x) = x^2 + 1$

④ $g(x) = x^3 + 1$ ⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함수값만 같으면 두 함수는 서로 같다.

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$$

① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$

⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

5. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax+b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a+b$, $f(4) = 4a+b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a+b \leq y \leq 4a+b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로

$$-a+b = -5, \quad 4a+b = 10$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$$\therefore 2a+b = 4$$

6. 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R 는 실수 전체의 집합이다.)

- ① 항등함수는 일대일 대응이다.
- ② $f: R \rightarrow R$ 가 항등함수이면 $f(x) = x$ 이다.
- ③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y = x$ 가 된다.
- ④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
- ⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

해설

③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y = x$ 이다.

(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = x$ 에서

$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 이면

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 가 아니다.

④ 집합 R 에서 R 로의 상수함수는 무수히 많다.

⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.

(반례) $f: X \rightarrow Y, f(x) = 3$ 에서

$X = \{1, 2, 3\}$ 이면 $y = f(x)$ 는 직선이 아니다.

따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

8. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$

II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

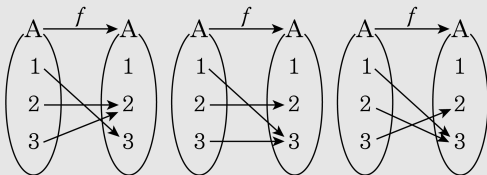
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개