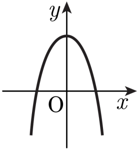
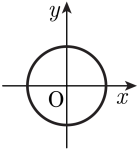
1. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

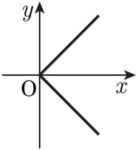
①



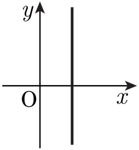
②



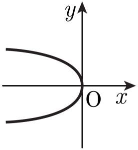
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

2. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

3. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$
② $f(x)=-x^2$
③ $f(x)=3x$
④ $f(x)=2x+3$
⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

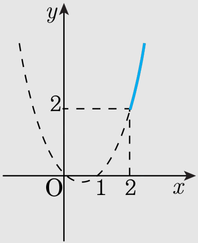
$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

5. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$
(i)$k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii)$k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
$\therefore\ k = 2$



6. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

① $y = -x^2$

② $y = -|x|$

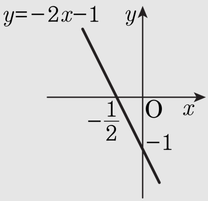
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로
일대일대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로
일대일 함수이지만 (공역)$\neq$ (치역) 이다.

7. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \to Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

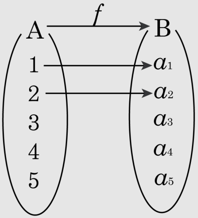
8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개　　② 25 개　　③ 64 개

④ 81 개　　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 $f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.



따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)