

1. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

2. 방정식 $|x - 1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때

$|x - 1| = x - 1$ 이므로, $x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

ii) $x < 1$ 일 때

$|x - 1| = -x + 1$ 이므로, $-x + 1 = 2$

$\therefore x = -1$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

3. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

4. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

5. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 의 해는 ?

① -2, 4

② -2, 2

③ -4, 4

④ -4, 2

⑤ -4, -2, 2, 4

해설

$$x^2 + 2|x| - 8 = 0 \text{ 에서}$$

i) $x > 0$ 일 때,

$$x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

i), ii) 에서 구하는 해는 -2, 2

6. x 에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 2\sqrt{3} = 0$$

① $-\sqrt{3}$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\{(\sqrt{3} + 1)x - 2\}(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} - 1 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3} - 1 + (-\sqrt{3}) = -1$$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 을 풀 때, a 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, b 를 잘못 보아 -2, 5를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

① $x = -1$ 또는 $x = -2$

② $x = -1$ 또는 $x = 2$

③ $x = 0$ 또는 $x = 2$

④ $x = 1$ 또는 $x = 2$

⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서

(i) 처음에는 x 의 계수 a 를 잘못 보고,

상수항 b 를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}$, 4의 곱은 옳다.

따라서 $b = 2$

(ii) 두 번째는 상수항 b 를 잘못 보고, x 의 계수 a 를 바르게 보았으므로

두 근 -2, 5의 합은 옳다.

따라서 $a = 3$,

$\therefore$ 주어진 이차방정식은

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

8. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\&= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

9. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차이가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$

② $-\frac{3}{4}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{9}{4}$

⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

10. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} + (i)^{50} \\ &= (-i)^2 + (i)^2 \\ &= -2\end{aligned}$$

11. x 의 이차방정식 $x^2 + (k-2)x + 2 + k^2 + k = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$$\alpha + \beta = 2 - k, \quad \alpha\beta = 2 + k^2 + k$$

$$\begin{aligned}\therefore (1-\alpha)(1-\beta) &= 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \cdots \cdots \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

실근 조건에 의해

$$D = (k-2)^2 - 4(2+k+k^2) \geq 0$$

$$3k^2 + 8k + 4 \leq 0 \quad \therefore (3k+2)(k+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$k = -1 \text{ 일 때 } m = 0$$

$$k = -2 \text{ 일 때 } M = 1$$

$$\therefore M + m = 1$$

12. x 에 관한 방정식 $x^4 + ax^2 + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$ (a, b 는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 7

해설

$$x^2 = t \text{라 놓으면 } t^2 + at + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$$

x 가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t 는 0과 음근 하나를 가져야 한다.

$$\text{두 근의 합 : } -a < 0 \quad \therefore a > 0$$

$$\text{두 근의 곱 : } a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$$

$$(a^2 - 1)^2 + (b - 2)^2 = 0$$

$$a^2 = 1, b = 2$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0), b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

13. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

14. n 이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2

② $-\sqrt{2}$

③ 0

④ 2

⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \\ &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (\pi^2)^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \{(-\pi)^2\}^{2n} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

15. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1$, $\beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -1

② 1

③ $1 + i$

④ $1 - i$

⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$ 에서 $\overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i \cdots \textcircled{㉠}$

$\alpha\bar{\alpha} = 1$, $\beta\bar{\beta} = 1$ 에서

$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdots \textcircled{㉡}$

㉡를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -i$, $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -i$, $\frac{i}{\alpha\beta} = -i$

$\therefore \alpha\beta = -1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha\beta) \\ &= i^2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$