

1. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값은?

- ① $x = 2$ 일 때, 최댓값은 4 ② $x = -2$ 일 때, 최댓값은 4
③ $x = 4$ 일 때, 최댓값은 4 ④ $x = 2$ 일 때, 최솟값은 4
⑤ $x = 4$ 일 때, 최솟값은 0

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

2. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x - 5)^2 + 12$$

$$\text{최댓값 } m = 12$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{최솟값 } n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5 (2 \leq x \leq 5)$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \right) + 5$$

$$= 2 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.

꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$$x = 2 \text{ 일 때 } y = 2 \left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = 5 \text{ 일 때 } y = 2 \left(5 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = 25$$

따라서 최댓값 $a = 25$ 이고, 최솟값 $b = 1$ 이므로 $ab = 25$

4. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

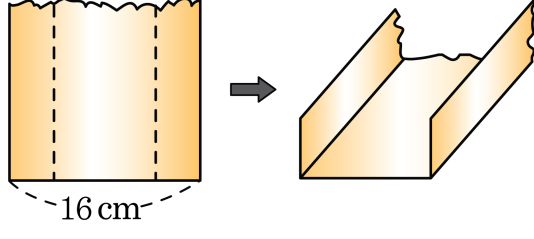
해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 2ax - 2a - 4 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ 의 최솟값 : } m &= -\frac{a^2}{2} - 2a - 4 \\ &= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$m \text{ 의 최댓값 : } -2$$

5. 다음 그림과 같이 너비가 16cm 인 철판의 양쪽을 접어 직사각형인 물받이를 만들었다. 단면의 넓이를 최대가 되게 하는 높이를 구하여라.



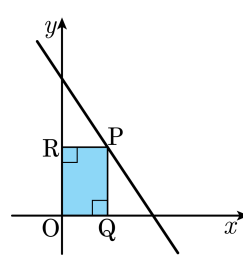
▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

높이를 x cm, 넓이를 y cm² 라고 두면
 $y = x(16 - 2x)$
 $= -2x^2 + 16x$
 $= -2(x^2 - 8x + 16) + 32$
 $= -2(x - 4)^2 + 32$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, 최댓값 32 를 가진다.

6. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

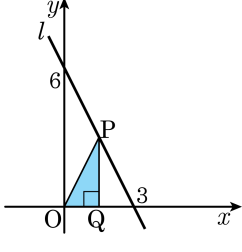
$$\begin{aligned}\square\text{OQPR} &= ab = a \left(-\frac{3}{2}a + 3 \right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square\text{OQPR}$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

7. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q라고 할 때, $\triangle POQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3, 0)$, $(0, 6)$ 을 지나므로

$$y = -2x + 6$$

점 P의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -2a + 6$

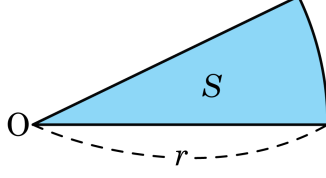
$$\begin{aligned}\triangle POQ &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(-2a + 6) \\ &= -a^2 + 3a \\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P는 제 1사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -2a + 6 > 0 \quad \therefore 0 < a < 3$$

따라서 $\triangle POQ$ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

8. 둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름의 길이가 r cm 일 때, 넓이를 S cm² 라고 한다. S 가 최대일 때, r 의 값은? (단, 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}lr$ 임을 이용하여라.)



- ① 3 ② 6 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름을 r cm 이라 하면 호의 길이는 $(12 - 2r)$ cm 이다.

$$\begin{aligned} \text{(부채꼴의 넓이)} &= \frac{1}{2}r(12 - 2r) = -r^2 + 6r \\ &= -(r - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

따라서 $r = 3$ 일 때, 부채꼴의 최대의 넓이는 9 이다.

9. 너비가 40cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

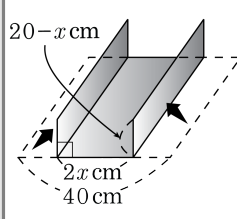
① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20 - x$ 이다.
단면의 넓이는

$$2x(20-x) = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x + 200) + 100 = -2(x-10)^2 + 200$$

$\therefore x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



10. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다.

해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.