1. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$을 간단히 하면?

① $\dfrac{2}{x(x+2)}$ ② $\dfrac{3}{x(x+2)}$

③ $\dfrac{2}{(x+2)(x+3)}$ ④ $\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\dfrac{3}{x(x+3)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x(x+3)}\end{aligned}$$

2. 분수식 $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x-1-\dfrac{1}{x-1}}$ 을 간단히 한 식은?

① $\dfrac{x}{x+2}$ ② $\dfrac{x}{x-2}$ ③ $\dfrac{x}{x+1}$ ④ $\dfrac{x}{x-1}$ ⑤ $\dfrac{2x}{x-1}$

해설

$$(\text{준 식}) = \frac{\dfrac{x^2-1+1}{x-1}}{\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-1}} = \frac{x^2}{x(x-2)}$$
$$= \frac{x}{x-2}$$

3. $3x = 2y$일 때, $\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$의 값은?

① $\dfrac{15}{7}$ ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{19}{9}$ ④ $\dfrac{21}{10}$ ⑤ $\dfrac{23}{11}$

해설

$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{2}x$

$\therefore \ \dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \dfrac{3x^2 + \frac{9}{4}x^2}{x^2 + \frac{3}{2}x^2} = \dfrac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{21}{10}$

4. 철수는 걸어서 학교에 다닌다. 한 걸음에 75 cm씩 1분에 평균 90 걸음을 가고, 통학 시간은 16분이다. 동생 철이도 같은 학교에 같은 길을 따라 걸어다니고, 한 걸음에 60 cm씩 1분에 평균 100걸음을 간다고 할 때, 동생 철이의 통학 시간은 몇 분인가?

① $14+\frac{2}{9}$분 ② 15분 ③ 18분
④ 20분 ⑤ $22+\frac{2}{9}$분

해설

철수 통학 거리는 $75\times 90\times 16(\text{cm})$

동생 철이의 통학 시간은 $\frac{75\times 90\times 16}{60\times 100}=18(\text{분})$

5. 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ −1 ⑤ −2

해설

역함수의 식은 $x=\dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy+2x=ay$

$\therefore y=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2}=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a=-2$

6. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

① $-2 \le x \le 1$　② $0 \le x \le 1$　③ $1 < x < 2$

④ $-1 \le x \le 2$　⑤ $1 \le x \le 2$

해설

$x + 1 \ge 0 \quad \therefore x \ge -1$

$2 - x \ge 0 \quad \therefore x \le 2$

$x - 1 \ge 0 \quad \therefore x \ge 1$

공통부분을 구하면 $1 \le x \le 2$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=|x-2|+ax-6$ 이 역함수를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a<-1$　② $-1<a<0$

③ $0<a<1$　④ $a>1$

⑤ $a<-1$ 또는 $a>1$

해설

$f(x)=|x-2|+ax-6$

$$=\begin{cases}(a+1)x-8 & (x\geq 2)\\ (a-1)x-4 & (x<2)\end{cases}$$

함수$f(x)$가 연속함수이므로 역함수가 존재하기 위해서는$f(x)$가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서, 기울기 $a+1$와 $a-1$은 모두 양이거나 모두 음이어야 한다.

즉, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore$ $a<-1$ 또는 $a>1$

8. 두 함수 $f(x) = x + a,\ g(x) = bx + c$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 1,\ g^{-1}(1) = 2$ 이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(1) = 2$ 에서 $g(2) = 1$

$g(2) = 2b + c = 1 \cdots$ ㉠

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + a = bx + c + a$

$= 2x - 1$ 이고

모든 x 에 대하여 성립해야 하므로

$b = 2 \cdots$ ㉡

$c + a = -1 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립으로 풀면

$a = 2$, $b = 2$, $c = -3$

$\therefore\ a + b + c = 2 + 2 + (-3) = 1$

9. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수f^{-1} 가$f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
즉 $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f(2) = 5$ 이다.
따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서
$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

10. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$일 때, $x^2-\frac{1}{x^2}$의 값은?

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{5}$

④ $\pm\sqrt{7}$ ⑤ $\pm 2\sqrt{5}$

해설

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=\pm 1$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm\sqrt{5}$$

11. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \dfrac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{x} + 1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y = \dfrac{1}{x-m} + 1 + n$이 식이
$y = \dfrac{-x+3}{x-2} = \dfrac{-(x-2)+1}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로
$m = 2,\ 1+n = -1$ 에서 $n = -2$
$\therefore\ m-n = 4$

12. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$(x+2)(x-3) \geq 0$

$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$y = \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)+4}{x-2}$

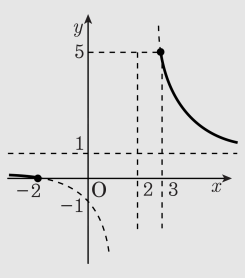
$= \dfrac{4}{x-2} + 1$

즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.



13. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$ 일 때, $f(2)$의 값은?

① -5 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$ 일 때,

$\dfrac{x-1}{x+1}=2$ 에서 $(x-1)=2(x+1)$

$x-1=2x+2$

$\therefore\ x=-3$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f(2)=\dfrac{-3-2}{-3+2}=\dfrac{-5}{-1}=5$

14. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이 성립할 때, $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a|$를 간단히 하면?

① $-2a$　② $a-2b$　③ $-2a+2b$

④ $2a-2b$　⑤ $3a$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a \geq 0,\ b < 0$

$\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a| = |a-b| - |b| + |2a|$

$= a - b + b + 2a = 3a$

15. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$의 소수 부분을 p라고 할 때, $2\left(p-\frac{1}{p}\right)$의 값은?

① $\sqrt{3}$　② 3　③ $3-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}-3$　⑤ $2-\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$
$$=\sqrt{3}+1\,\sqrt{3}+1=2.\cdots$$
$$\therefore P=\sqrt{3}-1\Rightarrow 2\left(P-\frac{1}{P}\right)$$
$$=2\left(\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$=2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$
$$=\sqrt{3}-3$$

16. $0 \le a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$1 + x = 1 + \dfrac{4a}{a^2+4} = \dfrac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \dfrac{(a+2)^2}{a^2+4}$

$1 - x = 1 - \dfrac{4a}{a^2+4} = \dfrac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}$

$a^2 + 4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a + 2 > 0,\ a - 2 < 0$

$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\dfrac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$\sqrt{1-x} = \sqrt{\dfrac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \dfrac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$\therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \dfrac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$

$\therefore a = 0$ 일 때 최댓값 2

17. 함수 $y = \sqrt{2x+2} + a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

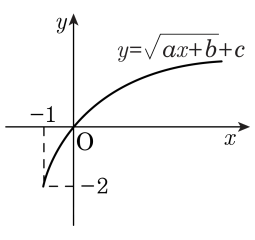
▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2} + a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

18. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

주어진 그래프에서 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의
그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동한 것이므로
$y=\sqrt{ax+b}+c$
$\Leftrightarrow \quad y=\sqrt{a(x+1)}-2$
이것이 원점을 지나므로 $0=\sqrt{a(0+1)}-2$
$\therefore \sqrt{a}=2 \quad \Rightarrow \quad a=4$
$y=\sqrt{4x+4}-2$
$\therefore a+b+c=4+4-2=6$

19. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

20. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 11개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2 = \sqrt{2k}$, $2k = 4$
$\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때
$6 = \sqrt{3k}$, $3k = 36$
$\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$2 \le k \le 12$ 이므로
정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$의 11개다.