**1.** 숫자 카드 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3 장을 골라 세 자리 수를 만들 때, 만든 수 중 3 의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

3 의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 3 의 배수이다.
1, 3, 5, 7, 9 로 만든 세 수를 더하여 3 의 배수의 되는 조합은, $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 9)$, $(3, 5, 7)$, $(5, 7, 9)$ 이다.
$\therefore$ 3 의 배수의 개수 $= 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$( 개)

**2.** $10^n$ 에 가장 가까운 11 의 배수 (단, $n$은 자연수)를 작은 순서대로 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots$ 라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1111110

해설

11 의 배수는 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11 의 배수인 수이므로,
$10^n$ 에서 가장 가까운 11 의 배수를 차례대로 구해 보면,
$10 \rightarrow 11$,
$10^2 \rightarrow 99$,
$10^3 \rightarrow 1001$,
$10^4 \rightarrow 9999$,
$10^5 \rightarrow 100001$,
$10^6 \rightarrow 999999$,
$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 1111110$

**3.** $a$ 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 $a$ 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. $x$는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x)=3$ 일 때, $x$ 의 값의 개수는?

① 6 개 ② 5 개 ③ 4 개 ④ 3 개 ⑤ 2 개

해설

$f(x)=3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
(소수)$^2$ 이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2$, $3^2$, $5^2$, $7^2$, $11^2$ 의 5 개

**4.** 서로 다른 두 자연수 $x, y$ 의 최소공배수는 120 이고, $4x-8=y$ 일 때, $xy$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 480

해설

$x,\ y$ 의 최대공약수를 $G$, 최소공배수를 $L$ 이라고 하면 $x=aG, y=bG, L=abG$ (단, $a$ 와 $b$ 는 서로소) 로 놓을 수 있다.
최소공배수가 120 이므로 $abG=120\cdots$ ㉠
또 $4x-8=y$ 이므로
$4aG-8=bG,\ (4a-b)G=8\cdots$ ㉡
각 변끼리 $\frac{㉡}{㉠}$ 을 계산하면
$\frac{4aG-bG}{abG}=\frac{8}{120}$ 에서 $\frac{4a-b}{ab}=\frac{1}{15}$,
$60a-15b=ab,\ a(60-b)=15b$,
$b>0,\ 60-b>0$ 이므로 $1\le b\le 59$ 를 만족하는 $(a,\ b)$ 의 순서쌍은 $(3,\ 10), (5,\ 15), (10,\ 24), (15,\ 30), (21,\ 35)\cdots$
$a,\ b$ 는 서로소인 자연수이므로 $a=3, b=10$
두 수의 최대공약수는 $abG=120$ 에서 $G=4$ 이고, 따라서 두 수의 곱 $xy=abG^2=3\times10\times16=480$

**5.** 어떤 마을의 전체 고등학생들을 대상으로 다니고 있는 고등학교를 조사했다.

| 고등학교 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 전체 고등학교에서 차지하는 비율 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

그런데 이 중 한 고등학교와 그 비율은 잘못 기재된 것이라고 한다. 전체 학생 수가 150 명이 넘고 300 명을 넘지 않을 때, A 고등학교에 다니는 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 56 명

해설

A, B, C, D, E 의 비율을 나타내는 각각의 분모의 최소공배수를 파악해보면, 3, 4, 5, 7, 8 이다.
3, 4, 5, 7, 8 중 4 개의 수로 150 이상 300 이하의 최소공배수가 가능한지 알아보면,
$3, 4, 5, 7 \rightarrow 420$ , $3, 4, 5, 8 \rightarrow 120$
$3, 5, 7, 8 \rightarrow 840$ , $4, 5, 7, 8 \rightarrow 280$
따라서 C 의 자료가 잘못된 것을 알 수 있고, 전체 학생의 수는 280 명이 된다.
$\therefore$(A 고등학교에 다니는 학생 수) $= 280 \times \frac{1}{5} = 56$ (명)

**6.** 두 정수 $a, b$ 가 $b < a < 0$ 일 때, $|a| + |b - a| = 5$ 이다. 이를 만족하는 순서쌍 $(a, b)$ 의 개수는 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$b < a < 0$ 이므로, $|a| = -a$ , $|b - a| = -(b - a)$ 이다.

$|a| + |b - a| = 5$
$(-a) - (b - a) = 5$
$\therefore b = -5$

$-5 < a < 0$ 이므로, $a$ 는 $-4, -3, -2, -1$ 중 하나이다.
따라서 순서쌍 $(a, b)$ 의 개수는 4 개이다.

**7.** $|a| \le 8,\ |b| \le 8$ 인 두 정수 $a,\ b$ 에 대하여 $a > b,\ \frac{a}{b} < 0$ 이다. $a - b = 8$ 을 만족하는 $b$ 의 최솟값을 $m$ , $ab = -15$ 를 만족하는 $a$ 의 최댓값을 $M$ 이라고 할 때, $|m - M|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a > b,\ \frac{a}{b} < 0$ 이므로 $a > 0,\ b < 0$ 이다.
$a - b = 8$ 를 만족하는 $a,\ b$ 의 값을 구해 보면
$(a, b) = (7, -1), (6, -2), (5, -3), (4, -4), (3, -5),$
$(2, -6), (1, -7)$ 이다.
따라서 $b$ 의 최솟값은 $-7$ 이고, $ab = -15$ 를 만족하는 $a$ 의 최댓값은 5 이다.
$\therefore |m - M| = |-7 - 5| = 12$

**8.** 연속하는 5 개의 정수의 합이 0 보다 작을 때, 5 개 중 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3$

해설

연속하는 5 개의 정수를 각각 $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$ 라 두면,
$5n+10<0,\ n<\ -2$ 이다.
$n\times(n+4)$ 는 $n$ 이 $-4$ 보다 작으면 양의 정수가 되므로,
$-3$ 일 때 최솟값을 가진다.
따라서 $-3\times1=-3$ 이므로 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값은 $-3$ 이다.

**9.** 방정식 $2|x-2| = \frac{2}{3}(12x+6)+x-2$ 의 해를 구하면?

① $\frac{1}{11}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $\frac{3}{11}$ ④ $\frac{4}{11}$ ⑤ $\frac{5}{11}$

해설

( i ) $x < 2$ 일 때,
$-2(x-2) = 8x+4+x-2$
$-2x-9x = -2$
$-11x = -2$
$x = \frac{2}{11}$
$x = \frac{2}{11} < 2$ 이므로 조건에 적합
( ii ) $x \geq 2$ 일 때,
$2(x-2) = 8x+4+x-2$
$2x-9x = 6$
$-7x = 6$
$x = -\frac{6}{7}$
$x = -\frac{6}{7} < 2$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
$\therefore x = \frac{2}{11}$

**10.** $x$ 에 관한 일차방정식 $3(5x+a)=2(x+10)+8x$ 의 해가 자연수가 되도록 하는 자연수의 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a=5$

해설

$3(5x+a)=2(x+10)+8x$
$15x+3a=2x+20+8x$
$5x=20-3a$
$x=4-\frac{3}{5}a$
$a=5$ 이면 $4-3=1$
$a=10$ 이면 $4-6=-2$ (자연수가 아니다)
$\therefore a=5$

**11.** $2x+1=|x|+|x-1|$ 을 만족하는 $x$ 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
$2x+1=|x|+|x-1|$, $2x+1=2x-1$ 성립하지 않는다.
2) $0 \leq x < 1$ 일 때,
$2x+1=|x|+|x-1|$, $2x+1=1$, $x=0$
3) $x < 0$ 일 때,
$2x+1=|x|+|x-1|$, $2x+1=-2x+1$, $x=0$, $x<0$ 이므로 성립하지 않는다.
따라서 $x$ 의 값의 합은 0 이다.

**12.** $a:b:c=1:2:3$ 일 때, $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}(x-1)+\frac{a+b+c}{a+2b+3c}-4=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=\frac{61}{11}$

해설

$a:b:c=1:2:3$ 이므로, $b=2a,\ c=3a$ 이다.

$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}(x-1)+\frac{a+b+c}{a+2b+3c}-4=0$ 에서

$\frac{2a^2+6a^2+3a^2}{a^2+4a^2+9a^2}(x-1)+\frac{a+2a+3a}{a+4a+9a}-4=0$

$\frac{11}{14}(x-1)+\frac{6}{14}-4=0$

$11x-11+6-56=0$

$11x=61$

$\therefore\ x=\frac{61}{11}$

**13.** 다음 방정식을 만족하는 정수 $x$, $y$ 에 대하여 $(x,\ y)$ 의 순서쌍이 무수히 많은 경우는?

① $x > 0$, $y < 0$ 일 때, $2x - 5y = 10$

② $x > 0$, $y < 0$ 일 때, $\frac{4}{3}x - \frac{3}{5}y = 7$

③ $x > 0$, $y < 0$ 일 때, $2x + y = -3$

④ $x < 0$, $y > 0$ 일 때, $3x - \frac{5}{2}y = 4$

⑤ $x < 0$, $y > 0$ 일 때, $-3x + 5y = 8$

해설

① 해가 없다.
② $20x - 9y = 105$, $(x,\ y) = (3,\ -5)$
③ 해가 무수히 많다.
④ $6x - 5y = 8$, 해가 없다.
⑤ $(x,\ y) = (-1,\ 1)$

**14.** 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 232 번째 바둑돌의 색깔과 왼쪽에서부터 100 번째까지의 검은 바둑돌의 개수를 순서대로 쓴 것은?

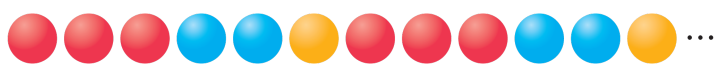


① 검은색, 20 개 ② 검은색, 40 개 ③ 검은색, 60 개
④ 흰색, 40 개 ⑤ 흰색, 60 개

해설

검은 바둑돌은 3 개씩, 흰 바둑돌은 2 개씩 반복된다. 따라서 다시 검은 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 5 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 5 개씩 반복된다. $232 = 5 \times 46 + 2$ 이므로 5 개씩 46 번 반복되고, 나머지가 2 이므로 232 번째 바둑돌의 색은 검은색이다. 그리고 100 번째까지 검은 바둑돌의 개수는 3 개씩 20 번이 반복된다. 따라서 60 개이다.

**15.** 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 50 번째까지의 빨간 바둑돌은 몇 개인가?



① 21 개　② 23 개　③ 25 개　④ 26 개　⑤ 28 개

해설

빨간 바둑돌은 3 개씩, 파란 바둑돌은 2 개씩, 노란 바둑돌은 1 개씩 반복된다. 따라서 다시 빨간 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 6 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 6 개씩 반복된다. $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 50 번째까지 빨간 바둑돌의 개수는 3 개씩 8 번이 반복되고 2 개가 더 배열된다. 따라서 26 개이다.

**16.** 자연수 $N$ 을 80 으로 나누면 몫이 2 이고 나머지가 $r$ 이다. $r$ 의 약수가 5 개일 때, $N$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 176

해설

$N = 80 \times 2 + r$ 이고 $r$ 의 약수가 5 개이므로,
$r$ 은 80 보다 작은 수 중 약수가 5 개인 수이다.
약수가 5 개이려면 반드시 같은 수의 제곱이 포함되므로,
$1, 4, 16, 25, 36, 49, 64$ 중 약수가 5 개인 수를 찾으면 된다. $\rightarrow$
$r = 16$
$\therefore N = 80 \times 2 + 16 = 176$

**17.** 자연수 $N$ 을 170 으로 나누면 몫이 2 이고 나머지가 $R$ 이다. $R$ 의 약수의 개수가 3 개일 때, $N$ 은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6개

해설

$N = 170 \times 2 + R$ 이고 $R$ 의 약수가 3 개이므로,
$R$ 은 170 보다 작은 수 중 약수가 3 개인 수이다.
약수가 3 개이려면 반드시 같은 수의 제곱이 포함되므로,
$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169$ 중 약수가 3 개인 수는 $4, 9, 25, 49, 121, 169$ 이다.
$\therefore N$ 의 개수=6 ( 개)

**18.** 어떤 수 $N$ 을 8 로 나누었을 때 몫이 $k$ 이고 나머지가 $k-1$ 인 두 자릿수 $N$ 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 71

해설

$N = 8k + (k-1) = 9k - 1$ 이고,
$k - 1 < 8$ 이므로 $k$ 의 최댓값은 8 이다.
$\therefore$ 두 자릿수 $N$ 중 가장 큰 수 $= 9 \times 8 - 1 = 71$

**19.** $5^x = 125$ 를 만족하는 $x$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$125 = 5^3$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

**20.** 1 부터 100 까지의 자연수를 모두 곱하면 $A \times (2 \times 5)^n$ 이 될 때, $n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100$ 에서 2 의 배수의 개수 : 50 개
$2^2$ 의 배수의 개수 : 25 개
$2^3$ 의 배수의 개수 : 12 개
$2^4$ 의 배수의 개수 : 6 개
$2^5$ 의 배수의 개수 : 3 개
$2^6$ 의 배수의 개수 : 1 개이고,
5 의 배수의 개수 : 20 개
$5^2$ 의 배수의 개수 : 4 개이므로

$$\therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100 = 2^{97} \times 5^{24} \times \cdots = A \times (2 \times 5)^{24}$$

$\therefore n = 24$