

1. 숫자 카드 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3 장을 골라 세 자리 수를 만들 때, 만든 수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24개

해설

3의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 3의 배수이다.

1, 3, 5, 7, 9로 만든 세 수를 더하여 3의 배수의 되는 조합은, (1, 3, 5), (1, 5, 9), (3, 5, 7), (5, 7, 9)이다.

$\therefore$ 3의 배수의 개수 $= 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$ (개)

2. 10^n 에 가장 가까운 11의 배수 (단, n 은 자연수)를 작은 순서대로 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1111110

해설

11의 배수는 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11의 배수인 수이므로,

10^n 에서 가장 가까운 11의 배수를 차례대로 구해 보면,

$$10 \rightarrow 11,$$

$$10^2 \rightarrow 99,$$

$$10^3 \rightarrow 1001,$$

$$10^4 \rightarrow 9999,$$

$$10^5 \rightarrow 100001,$$

$$10^6 \rightarrow 999999,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1111110$$

3. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.
 x 는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x 의 값의 개수는?

① 6 개

② 5 개

③ 4 개

④ 3 개

⑤ 2 개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
(소수)² 이므로

150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5 개

4. 서로 다른 두 자연수 x, y 의 최소공배수는 120 이고, $4x - 8 = y$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 480

해설

x, y 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라고 하면 $x = aG, y = bG, L = abG$ (단, a 와 b 는 서로소)로 놓을 수 있다.

최소공배수가 120 이므로 $abG = 120 \cdots \textcircled{7}$

또 $4x - 8 = y$ 이므로

$$4aG - 8 = bG, (4a - b)G = 8 \cdots \textcircled{8}$$

각 변끼리 $\frac{\textcircled{8}}{\textcircled{7}}$ 을 계산하면

$$\frac{4aG - bG}{abG} = \frac{8}{120} \text{ 에서 } \frac{4a - b}{ab} = \frac{1}{15},$$

$$60a - 15b = ab, a(60 - b) = 15b,$$

$b > 0, 60 - b > 0$ 이므로 $1 \leq b \leq 59$ 를 만족하는 (a, b) 의 순서쌍은 $(3, 10), (5, 15), (10, 24), (15, 30), (21, 35) \cdots$

a, b 는 서로소인 자연수이므로 $a = 3, b = 10$

두 수의 최대공약수는 $abG = 120$ 에서 $G = 4$ 이고, 따라서 두 수의 곱 $xy = abG^2 = 3 \times 10 \times 16 = 480$

5. 어떤 마을의 전체 고등학생들을 대상으로 다니고 있는 고등학교를 조사했다.

고등학교	A	B	C	D	E
전체 고등학교에서 차지하는 비율	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

그런데 이 중 한 고등학교와 그 비율은 잘못 기재된 것이라고 한다. 전체 학생 수가 150 명이 넘고 300 명을 넘지 않을 때, A 고등학교에 다니는 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 56 명

해설

A, B, C, D, E 의 비율을 나타내는 각각의 분모의 최소공배수를 파악해보면, 3, 4, 5, 7, 8 이다.

3, 4, 5, 7, 8 중 4 개의 수로 150 이상 300 이하의 최소공배수가 가능한지 알아보면,

$$3, 4, 5, 7 \rightarrow 420, \quad 3, 4, 5, 8 \rightarrow 120$$

$$3, 5, 7, 8 \rightarrow 840, \quad 4, 5, 7, 8 \rightarrow 280$$

따라서 C 의 자료가 잘못된 것을 알 수 있고, 전체 학생의 수는 280 명이 된다.

$$\therefore (A \text{ 고등학교에 다니는 학생 수}) = 280 \times \frac{1}{5} = 56 \text{ (명)}$$

6. 두 정수 a, b 가 $b < a < 0$ 일 때, $|a| + |b - a| = 5$ 이다. 이를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$b < a < 0$ 이므로, $|a| = -a$, $|b - a| = -(b - a)$ 이다.

$$|a| + |b - a| = 5$$

$$(-a) - (b - a) = 5$$

$$\therefore b = -5$$

$-5 < a < 0$ 이므로, a 는 $-4, -3, -2, -1$ 중 하나이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4 개이다.

7. $|a| \leq 8$, $|b| \leq 8$ 인 두 정수 a, b 에 대하여 $a > b$, $\frac{a}{b} < 0$ 이다. $a - b = 8$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 m , $ab = -15$ 를 만족하는 a 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $|m - M|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a > b$, $\frac{a}{b} < 0$ 이므로 $a > 0$, $b < 0$ 이다.

$a - b = 8$ 를 만족하는 a, b 의 값을 구해 보면
 $(a, b) = (7, -1), (6, -2), (5, -3), (4, -4), (3, -5),$
 $(2, -6), (1, -7)$ 이다.

따라서 b 의 최솟값은 -7 이고, $ab = -15$ 를 만족하는 a 의 최댓값은 5 이다.

$$\therefore |m - M| = |-7 - 5| = 12$$

8. 연속하는 5 개의 정수의 합이 0 보다 작을 때, 5 개 중 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

연속하는 5 개의 정수를 각각 $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ 라 두면,

$$5n + 10 < 0, n < -2 \text{ 이다.}$$

$n \times (n+4)$ 는 n 이 -4 보다 작으면 양의 정수가 되므로,
 -3 일 때 최솟값을 가진다.

따라서 $-3 \times 1 = -3$ 이므로 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 곱의 최솟값은 -3 이다.

9. 방정식 $2|x-2| = \frac{2}{3}(12x+6) + x-2$ 의 해를 구하면?

① $\frac{1}{11}$

② $\frac{2}{11}$

③ $\frac{3}{11}$

④ $\frac{4}{11}$

⑤ $\frac{5}{11}$

해설

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-2(x-2) = 8x+4+x-2$$

$$-2x-9x = -2$$

$$-11x = -2$$

$$x = \frac{2}{11}$$

$$x = \frac{2}{11} < 2 \text{ 이므로 조건에 적합}$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$2(x-2) = 8x+4+x-2$$

$$2x-9x = 6$$

$$-7x = 6$$

$$x = -\frac{6}{7}$$

$$x = -\frac{6}{7} < 2 \text{ 이므로 조건에 맞지 않는다.}$$

$$\therefore x = \frac{2}{11}$$

10. x 에 관한 일차방정식 $3(5x + a) = 2(x + 10) + 8x$ 의 해가 자연수가 되도록 하는 자연수의 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$$3(5x + a) = 2(x + 10) + 8x$$

$$15x + 3a = 2x + 20 + 8x$$

$$5x = 20 - 3a$$

$$x = 4 - \frac{3}{5}a$$

$$a = 5 \text{ 이면 } 4 - 3 = 1$$

$$a = 10 \text{ 이면 } 4 - 6 = -2 \text{ (자연수가 아니다)}$$

$$\therefore a = 5$$

11. $2x + 1 = |x| + |x - 1|$ 을 만족하는 x 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$2x + 1 = |x| + |x - 1|$, $2x + 1 = 2x - 1$ 성립하지 않는다.

2) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$2x + 1 = |x| + |x - 1|$, $2x + 1 = 1$, $x = 0$

3) $x < 0$ 일 때,

$2x + 1 = |x| + |x - 1|$, $2x + 1 = -2x + 1$, $x = 0$, $x < 0$ 이므로
성립하지 않는다.

따라서 x 의 값의 합은 0이다.

12. $a : b : c = 1 : 2 : 3$ 일 때, $\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}(x - 1) + \frac{a + b + c}{a + 2b + 3c} - 4 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $x = \frac{61}{11}$

해설

$a : b : c = 1 : 2 : 3$ 이므로, $b = 2a$, $c = 3a$ 이다.

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}(x - 1) + \frac{a + b + c}{a + 2b + 3c} - 4 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{2a^2 + 6a^2 + 3a^2}{a^2 + 4a^2 + 9a^2}(x - 1) + \frac{a + 2a + 3a}{a + 4a + 9a} - 4 = 0$$

$$\frac{11}{14}(x - 1) + \frac{6}{14} - 4 = 0$$

$$11x - 11 + 6 - 56 = 0$$

$$11x = 61$$

$$\therefore x = \frac{61}{11}$$

13. 다음 방정식을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 (x, y) 의 순서쌍이 무수히 많은 경우는?

① $x > 0, y < 0$ 일 때, $2x - 5y = 10$

② $x > 0, y < 0$ 일 때, $\frac{4}{3}x - \frac{3}{5}y = 7$

③ $x > 0, y < 0$ 일 때, $2x + y = -3$

④ $x < 0, y > 0$ 일 때, $3x - \frac{5}{2}y = 4$

⑤ $x < 0, y > 0$ 일 때, $-3x + 5y = 8$

해설

① 해가 없다.

② $20x - 9y = 105, (x, y) = (3, -5)$

③ 해가 무수히 많다.

④ $6x - 5y = 8$, 해가 없다.

⑤ $(x, y) = (-1, 1)$

15. 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 50 번째까지의 빨간 바둑돌은 몇 개인가?



- ① 21 개 ② 23 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 28 개

해설

빨간 바둑돌은 3 개씩, 파란 바둑돌은 2 개씩, 노란 바둑돌은 1 개씩 반복된다. 따라서 다시 빨간 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 6 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 6 개씩 반복된다. $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 50 번째까지 빨간 바둑돌의 개수는 3 개씩 8 번이 반복되고 2 개가 더 배열된다. 따라서 26 개이다.

16. 자연수 N 을 80 으로 나누면 몫이 2 이고 나머지가 r 이다. r 의 약수가 5 개일 때, N 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 176

해설

$N = 80 \times 2 + r$ 이고 r 의 약수가 5 개이므로,

r 은 80 보다 작은 수 중 약수가 5 개인 수이다.

약수가 5 개이려면 반드시 같은 수의 제곱이 포함되므로,

1, 4, 16, 25, 36, 49, 64 중 약수가 5 개인 수를 찾으면 된다. $\rightarrow$

$$r = 16$$

$$\therefore N = 80 \times 2 + 16 = 176$$

17. 자연수 N 을 170 으로 나누면 몫이 2 이고 나머지가 R 이다. R 의 약수의 개수가 3 개일 때, N 은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

$N = 170 \times 2 + R$ 이고 R 의 약수가 3 개이므로,

R 은 170 보다 작은 수 중 약수가 3 개인 수이다.

약수가 3 개이려면 반드시 같은 수의 제곱이 포함되므로,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 중 약수가 3 개인 수는 4, 9, 25, 49, 121, 169 이다.

$\therefore N$ 의 개수 = 6 (개)

18. 어떤 수 N 을 8 로 나누었을 때 몫이 k 이고 나머지가 $k-1$ 인 두 자릿수 N 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 71

해설

$$N = 8k + (k - 1) = 9k - 1 \text{ 이고,}$$

$k - 1 < 8$ 이므로 k 의 최댓값은 8 이다.

$$\therefore \text{두 자릿수 } N \text{ 중 가장 큰 수} = 9 \times 8 - 1 = 71$$

19. $5^x = 125$ 를 만족하는 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$125 = 5^3$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

20. 1 부터 100 까지의 자연수를 모두 곱하면 $A \times (2 \times 5)^n$ 이 될 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100$ 에서 2 의 배수의 개수 : 50 개

2^2 의 배수의 개수 : 25 개

2^3 의 배수의 개수 : 12 개

2^4 의 배수의 개수 : 6 개

2^5 의 배수의 개수 : 3 개

2^6 의 배수의 개수 : 1 개이고,

5 의 배수의 개수 : 20 개

5^2 의 배수의 개수 : 4 개이므로

$$\begin{aligned}\therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100 &= 2^{97} \times 5^{24} \times \cdots \\ &= A \times (2 \times 5)^{24}\end{aligned}$$

$$\therefore n = 24$$