

1. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$y = ax + 2 \cdots \textcircled{3} \text{이라 할 때,}$$

①, ②의 교점이 ③위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 (2, 0) 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

2. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
- ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
- ② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
- ③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- ④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
- ⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3, x-4$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 2이고, 다항식 $f(x+1)$ 을 x^2-5x+6 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3) = 3, f(4) = 2$
 $R(x) = ax + b$ 라 하면
 $f(x+1) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$
 $x = 2$ 대입,
 $f(3) = 2a + b = 3$
 $x = 3$ 대입,
 $f(4) = 3a + b = 2$
 $a = -1, b = 5$
 $R(x) = -x + 5,$
 $R(1) = -1 + 5 = 4$

4. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

- ① 75 ② 125 ③ 900 ④ 1000 ⑤ 1225

해설

$$\begin{aligned} 125^2 - 75^2 &= (125 + 75)(125 - 75) \\ &= 200 \times 50 = 10000 \\ 5 + (30 - 50) \div (-4) &= 5 + 5 = 10 \text{ 이므로} \\ (\text{준 식}) &= 10000 \div 10 = 1000 \end{aligned}$$

5. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y 의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

- (1) x 의 값의 범위를 구하여라.
(2) 빗변의 길이를 z 라 할 때, z^2 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.
(3) z^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \leq x \leq 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

(1) $x + y = 10$ 에서 $y = 10 - x$ 이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로

$$\frac{1}{2}xy \geq 8, \quad \frac{1}{2}x(10 - x) \geq 8$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0, \quad (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 8$$

(2) 피타고라스의 정리에 의해

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$

이 때, $2 \leq x \leq 8$ 이므로 z^2 은 $x = 5$ 일 때

최솟값 50, $x = 2$ 또는 $x = 8$ 일 때

최댓값 68을 갖는다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (k+3)x + 3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \leq 4$ 가 되도록

하는 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < k < 1$ ② $-1 < k < 3$ ③ $k \geq -1$
④ $k \leq 1$ ⑤ $-1 \leq k \leq 3$

해설

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \leq 0$, $1 \leq x \leq 4$

$x^2 - (k+3)x + 3k > 0$ 에서 $(x-k)(x-3) > 0$

i) $x < k$ 또는 $x > 3$

ii) $x < 3$ 또는 $x > k$

해가 $3 < x < 4$ 가 되려면 i)의 경우이어야 하고 $k \leq 1$ 이어야 한다

7. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned}\therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244\end{aligned}$$

8. $x + 3y = 5$, $4y + 3z = 6$ 일 때, 부등식 $x < 3y < 5z$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

- ① $\frac{5}{6} < x < \frac{10}{9}$ ② $\frac{30}{29} < x < \frac{5}{3}$ ③ $\frac{55}{29} < x < \frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{2} < x < \frac{90}{29}$ ⑤ $-\frac{90}{29} < x < -\frac{5}{2}$

해설

$x + 3y = 5$ 를 y 에 관하여 풀면

$$y = \frac{5-x}{3}$$

$4y + 3z = 6$ 을 z 에 관하여 풀면

$$z = \frac{6-4y}{3} = 2 - \frac{4}{3}y$$

$y = \frac{5-x}{3}$ 을 대입하면

$$z = 2 - \frac{4}{3} \times \frac{5-x}{3} = 2 - \frac{20-4x}{9} = \frac{4x-2}{9}$$

$y = \frac{5-x}{3}$, $z = \frac{4x-2}{9}$ 를 부등식에 대입하면

$$x < 5-x < 5 \times \frac{4x-2}{9}$$

$$x < 5-x, 2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$5-x < \frac{5(4x-2)}{9}, 45-9x < 20x-10,$$

$$\frac{55}{29} < x \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{55}{29} < x < \frac{5}{2}$$

9. 15%의 설탕물 300g이 있다. 여기에서 200g의 설탕물을 버리고 물 x g을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x 가 될 수 없는 것은?

- ① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.

따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15%의 설탕물 100g이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15$ (g)이다.

여기에 물 x g을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \\ \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 가 $\alpha < 0 < \beta$ 을 만족할 때, a 의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a > \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $2 < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < -2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4(a^2 - 4) > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ii) 두 근이 $\alpha < 0 < \beta$ 이라면

$x = 0$ 을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow a^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

i), ii)의 공통 범위: $-2 < a < 2$

11. 점 P를 x 축에 대해 대칭이동하고, x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$P(a, b)$ 를 x 축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 3 만큼 평행이동
 $\Rightarrow (a - 2, -b + 3)$
 $y = -x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b - 3, -a + 2)$
다시 점P와 일치하므로
 $b - 3 = a, -a + 2 = b$ 에서
 $a - b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면, $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

12. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3\end{aligned}$$

$$\therefore g(t) \text{ 는 } t = -2 \text{ 일 때, 최솟값 } -2 \text{ } (\because t \geq -2)$$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + 3a - 2 = 0$ 이 허근을 갖고 이 근의 세제곱은 실수이다. 이 때, 실수 a 값들의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

한 허근을 x 라 하면 $x^3 = b^3$ (b 는 실수)라 할 수 있다.

$$x^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2) = 0$$

$$x^2 + ax + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + b^2 = 0$$

$$a = b, 3a - 2 = b^2$$

두 식을 연립해서 풀면 $a = 1, 2$

해설

$$x^2 = -ax - 3a + 2 \quad x^3 = -ax^2 - (3a - 2)x$$

$$x^3 = k \text{ (실수)라 하면 } k = -a(-ax - 3a + 2) - (3a - 2)x$$

$$(a^2 - 3a + 2)x + 3a^2 + 2a - k = 0$$

$$x \text{가 허수이므로 } a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a - 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 1, 2$$

14. 100 개의 연필을 학생들에게 나누어 주었더니 5 개씩 나눠주면 연필이 남고, 8 개씩 나눠 주면 연필이 모자란다. 이때, 학생의 수로 옳지 않은 것은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

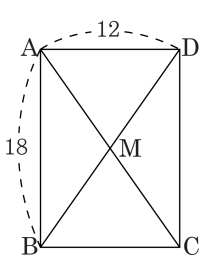
문제에서 구하고자 하는 학생의 수를 x 라고 놓자.
모든 학생이 5 개씩 가지고 있을 때 전체 연필수는 $5x$ 이고, 모든 학생이 8 개씩 가지고 있을 때 전체 연필수는 $8x$ 이다. 그러나 연필수는 모든 학생이 5 개씩 가질 때 보다 많고, 모든 학생이 8 개씩 가질 때 보다 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $5x < 100 < 8x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 5x < 100 \\ 8x > 100 \end{cases}$ 이고, 간단히 하

면, $\begin{cases} x < 20 \\ x > \frac{25}{2} \end{cases}$ 이다. 이를 다시 나타내면 $\frac{25}{2} < x < 20$ 이다.

$\frac{25}{2} = 12.5$ 이므로, 학생의 수는 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 명이 가능하다.

15. 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = 18$, $\overline{AD} = 12$ 이고, 두 대각선의 교점은 M이다. 삼각형 ABD의 무게중심을 G, 삼각형 CDM의 무게중심을 H라 할 때, 두 점 G와 H사이의 거리는?



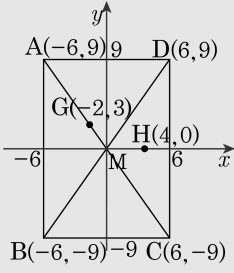
- ① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$
 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

그림과 같이 좌표를 정하면

$$G\left(\frac{-6+6-6}{3}, \frac{9+9-9}{3}\right)$$

$$H\left(\frac{6+0+6}{3}, \frac{9+0-9}{3}\right)$$



$$\text{그러므로 } \overline{GH} = \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$