1. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$
③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$
⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$ 에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

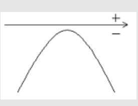
$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

2. 이차부등식 $(k-1)x^2-2x+k+1<0$이 모든 실수 x에 대해서 성립할 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ② $k>\sqrt{2}$ ③ $k<-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2}<k<1$ ⑤ $1<k<\sqrt{2}$

해설

$(k-1)x^2-2x+(k+1)<0$



ⅰ) 위로 볼록이어야 하므로 $k<1$

ⅱ) x축과 만나지 않아야 하므로 $\frac{D}{4}<0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)(k+1)<0$

$2-k^2<0$, $k^2>2$

$\therefore\ k<-\sqrt{2}$, $k>\sqrt{2}$

ⅰ), ⅱ) 모두 만족하는 범위는 $k<-\sqrt{2}$

3. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2+(k+2)x+2k+1>0$ 이 성립하도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<2$ ② $0<k<4$ ③ $1<k<2$
④ $1<k<4$ ⑤ $-1<k<4$

해설

판별식 D 가 $D<0$ 이어야 하므로
$D=(k+2)^2-4(2k+1)<0$, $k^2-4k<0$,
$k(k-4)<0$
$\therefore 0<k<4$

4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$이므로
$x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
따라서, $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$
$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$\therefore$ $f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
$\therefore$ $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

5. 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 10 일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\ \dfrac{3+\beta}{4}$

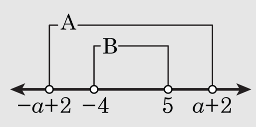
$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

6. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$　② $0 < a < 3$　③ $0 \leq a \leq 3$
④ $a \geq 3$　⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore \ a \geq 6$



7. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

> 가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 ㈎ cm 이다.
> 이때, x 의 값의 범위는 ㈏이다.
> 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)$=$ x ㈎이다.
> 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ ㈎ $\geq$ ㈐
> 이식을 정리하면 ㈑ ≤ 0
> ㈑를 인수분해하면 ㈒이다.
> 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

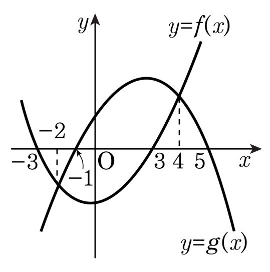
다음 중 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑, ㈒ 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

① ㈎ $(14-x)$　　② ㈏ $0<x<14$
③ ㈐ 45　　④ ㈑ $14x-x^2-45$
⑤ ㈒ $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
$=2$(가로의 길이 $+$ 세로의 길이)
$28=2x+2\cdot$㈎, $14=x+$㈎
$\therefore$ ㈎ $=14-x$
가로의 길이의 범위 : $x>0$, $14-x>0 \rightarrow x<14$
$\therefore\ 0<x<14\ \cdots$ ㈏
직사각형의 넓이 : $x(14-x)\geq 45$
$\therefore$ ㈐ $=45$
㈑ $=x^2-14x+45\leq 0$
㈒ $=(x-5)(x-9)\leq 0$

8. 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $x<-1$ 또는 $x>3$

② $x<-1$ 또는 $4<x<5$

③ $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

④ $-3<x<-2$ 또는 $4<x<5$

⑤ $-2<x<-1$ 또는 $3<x<5$

해설

$f(x)g(x)>0$ 에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $3<x<5$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-3<x<-1$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 부등식의 해는 $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

9. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$ ② $-6 < a < -2$ ③ $a \geq 3$, $a \leq -1$

④ $a \geq 0$ ⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

10. 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3,\ n=-2$
$\therefore\ mn=6$

11. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1| < 3 & \cdots ㉠ \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq 1$

② $x < -2$ 또는 $x \leq 1$

③ $-2 < x \leq -1$

④ $-1 < x \leq 2$

⑤ $-2 < x \leq 3$

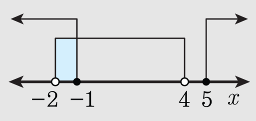
해설

㉠ : $|x-1| < 3$

$\rightarrow$ $-3 < x-1 < 3$, $-2 < x < 4$

㉡ : $(x-5)(x+1) \geq 0$

$\rightarrow$ $x \leq -1, x \geq 5$



$\therefore -2 < x \leq -1$

12. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

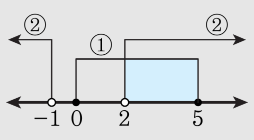
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①



또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

13. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 $3,\ 4,\ x$이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 $3^2,\ 4^2,\ x^2$이다. 이 때, 정수 x 의 값의 개수는?

① 2 개　　② 3 개

③ 4 개　　④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야
하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$ 의
6 개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$ 이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$ 이다.

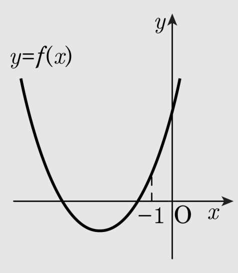
14. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

15. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$　　② $a>-1$　　③ $a>1$

④ $a<1$　　⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

16. 부등식 $|x^2+x+1| \leq |x+2|$의 해는?

① $x \leq -1$　　② $-1 \leq x \leq 1$　　③ $x \geq 1$

④ 해는 없다.　　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \leq |x+2|$에서

(ⅰ) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \leq -(x+2)$, $x^2+2x+3 \leq 0$

$(x+1)^2+2 \leq 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $x \geq -2$일 때,

$x^2+x+1 \leq x+2$, $x^2 \leq 1$

$\therefore -1 \leq x \leq 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

17. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1>0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하면?

① $k<1,\ k>2$　② $1<k<2$　③ $-2\le k\le 2$

④ $k\le 1,\ k>2$　⑤ $1\le k<2$

해설

ⅰ) $k\ne 1$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면
판별식이 0보다 작아야 한다

$D'=(k-1)^2-(k-1)<0$

$\Rightarrow (k-1)(k-2)<0$

$\Rightarrow\ \ 1<k<2$

ⅱ) $k=1\Rightarrow\ \ 1>0$ 성립

$\therefore k$의 범위 : $1\le k<2$

18. $\alpha<0<\beta$ 이고 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$
② $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$
③ $x<\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>\frac{1}{\beta}$
④ $x<\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$
⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ $(\alpha<0<\beta)$ 이므로
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),\ a>0$

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}<0\quad\therefore\ c<0$

따라서,

$$\begin{aligned}cx^2+bx+a&=c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right)\\&=c\left(x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\\&=c\left\{x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\}\\&=c\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)<0\end{aligned}$$

$c<0$ 이고 $\frac{1}{\alpha}<0<\frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x<\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>\frac{1}{\beta}$

19. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하　② 10만원 이상 15만원 이하

③ 5만원 이상 10만원 이하　④ 4만원 이상 8만원 이하

⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$

$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$

$\therefore 5 \leq x \leq 10$

10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

20. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\le 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\le 0 \Rightarrow f(k)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 2$

$\Rightarrow -4\le g(x)\le 2$

$\Rightarrow 15\le x^2\le 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

21. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2} < k < 0$　　② $1 < k < \frac{3}{2}$　　③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}$

④ $-2 < k < -\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{1}{2} < k < 1$

해설

i) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \ \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠ $\times 3 -$ ㉡ $-$ ㉢에서

$4x = -2k^2 - k + 3$

$= -(2k+3)(k-1) > 0 \cdots$ ㉣

㉡ $\times 3 -$ ㉢ $-$ ㉠에서

$4y = -2k^2 + 3k - 1$

$= -(2k-1)(k-1) > 0 \cdots$ ㉤

㉢ $\times 3 -$ ㉠ $-$ ㉡에서

$4z = 6k^2 - k - 1$

$= (3k+1)(2k-1) > 0 \cdots$ ㉥

ii) ㉣ 에서 $-\frac{3}{2} < k < 1$

㉤에서 $\frac{1}{2} < k < 1$

㉥에서 $k < -\frac{1}{3}, k > \frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2} < k < 1$

22. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$x^2-2x-3>3x-3$, $x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$, $x<0$ 또는 $x>5$

$\therefore x>5$

2) $x<1$ 일 때,

$x^2-2x-3>-3x+3$, $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$, $x<-3$ 또는 $x>2$

$\therefore x<-3$

1), 2) 에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가

$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로

$a<0$이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$이다.

$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$에서

$a=-1, c=15 \quad \therefore a+c=14$

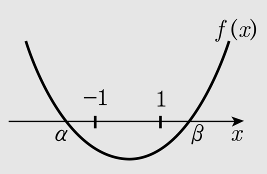
23. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p 의 값의 범위는 ?

① $p>-2$ ② $p>-1$ ③ $p<-2$

④ $p<-1$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0$ $\therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0$ $\therefore p<-\dfrac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

24. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 -1 과 2 사이에 있도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$
④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로
$\mathrm{D} > 0$ 에서 $\mathrm{D} = a^2 - 4 > 0,\ (a-2)(a+2) > 0$
$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$
(ii) $f(-1) > 0$ 에서 $1 + a + 1 > 0$
$\therefore\ a > -2$
(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$
$\therefore\ \frac{5}{2} > a$
(iv) 대칭축이 -1 과 2 사이에 있어야 하므로
$-1 < \frac{a}{2} < 2$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv) 에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

25. x에 관한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 - 2a = 0$이 실수 해 $\alpha,\ \beta$를 가질 때 $\alpha\beta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M + m$은 ?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{6}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

해설

준 방정식의 판별식

$D = a^2 - 4(a^2 - 2a) \geq 0$ ($\because$ 실수해를 가지므로)

$a^2 - 4a^2 + 8a \geq 0,\ \ -3a^2 + 8a \geq 0$

$3a^2 - 8a \leq 0,\ \ a(3a - 8) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$

또, 근과 계수와의 관계에서

$\alpha\beta = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$

$\therefore$ $\alpha\beta$의 최솟값은 $a = 1$일 때, -1, 최댓값은 $a = \frac{8}{3}$일 때, $\frac{16}{9}$

$\therefore\ m + n = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$