1. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

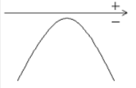
2. 이차부등식 $(k-1)x^2-2x+k+1<0$이 모든 실수 x에 대해서 성립할 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ② $k>\sqrt{2}$ ③ $k<-\sqrt{2}$

④ $-\sqrt{2}<k<1$ ⑤ $1<k<\sqrt{2}$

해설

$(k-1)x^2-2x+(k+1)<0$



ⅰ) 위로 볼록이어야 하므로 $k<1$

ⅱ) x축과 만나지 않아야 하므로 $\frac{D}{4}<0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)(k+1)<0$

$2-k^2<0,\ k^2>2$

$\therefore\ k<-\sqrt{2},\ k>\sqrt{2}$

ⅰ), ⅱ) 모두 만족하는 범위는 $k<-\sqrt{2}$

3. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2+(k+2)x+2k+1>0$ 이 성립하도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<2$ ② $0<k<4$ ③ $1<k<2$

④ $1<k<4$ ⑤ $-1<k<4$

해설

판별식 D 가 $D<0$ 이어야 하므로

$D=(k+2)^2-4(2k+1)<0$, $k^2-4k<0$,

$k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$

4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
$\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$이므로

$$x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$$

따라서, $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$

$$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$

$\therefore\ f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$

$$\therefore\ \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

5. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$$x=\frac{3+\alpha}{4},\quad \frac{3+\beta}{4}$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

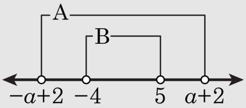
6. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $a \ge 3$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



7. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

> 가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 (가) cm 이다.
> 이때, x 의 값의 범위는 (나)이다.
> 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)$=x$ (가)이다.
> 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ (가) $\geq$ (다)
> 이식을 정리하면 (라) ≤ 0
> (라)를 인수분해하면 (마)이다.
> 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

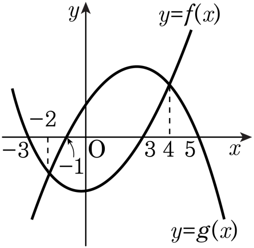
다음 중 (가), (나), (다), (라), (마) 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

① (가) $(14-x)$
② (나) $0<x<14$
③ (다) 45
④ (라) $14x-x^2-45$
⑤ (마) $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
$=2$(가로의 길이 $+$ 세로의 길이)
$28=2x+2\cdot$(가), $14=x+$(가)
$\therefore$ (가) $=14-x$
가로의 길이의 범위 : $x>0$, $14-x>0 \rightarrow x<14$
$\therefore\ 0<x<14\ \cdots$ (나)
직사각형의 넓이 : $x(14-x)\geq 45$
$\therefore$ (다) $=45$
(라) $=x^2-14x+45\leq 0$
(마) $=(x-5)(x-9)\leq 0$

8. 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $x<-1$ 또는 $x>3$

② $x<-1$ 또는 $4<x<5$

③ $-3<x<-1$ 또는$3<x<5$

④ $-3<x<-2$ 또는 $4<x<5$

⑤ $-2<x<-1$ 또는 $3<x<5$

해설

$f(x)g(x)>0$에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(ⅰ) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족하는 x의 값의 범위는 $3<x<5$

(ⅱ) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족하는 x의 값의 범위는 $-3<x<-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 부등식의 해는 $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

9. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$ ② $-6 < a < -2$ ③ $a \geq 3$, $a \leq -1$

④ $a \geq 0$ ⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

10. 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1<x<\frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3$, $n=-2$
$\therefore\ mn=6$

11. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1| < 3 & \cdots ㉠ \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq 1$

② $x < -2$ 또는 $x \leq 1$

③ $-2 < x \leq -1$

④ $-1 < x \leq 2$

⑤ $-2 < x \leq 3$

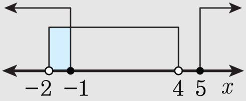
해설

㉠ : $|x-1| < 3$

$\rightarrow$ $-3 < x - 1 < 3$, $-2 < x < 4$

㉡ : $(x-5)(x+1) \geq 0$

$\rightarrow$ $x \leq -1, x \geq 5$



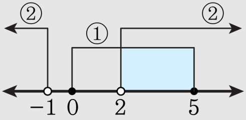
$\therefore -2 < x \leq -1$

12. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$ 이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

13. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 3, 4, x이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 3^2, 4^2, x^2이다. 이 때, 정수 x 의 값의 개수는?

① 2 개 ② 3 개

③ 4 개 ④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야 하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의
6개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

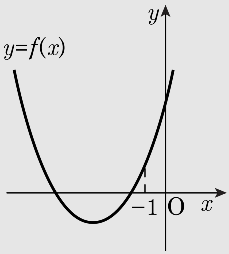
14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6-k) > 0$ 에서
$k^2 + k - 6 > 0,\ (k+3)(k-2) > 0$
$\therefore\ k < -3$ 또는 $k > 2$
(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$
이상에서 $-7 < k < -3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

15. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$ ② $a>-1$ ③ $a>1$

④ $a<1$ ⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

16. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$　② $-1 \le x \le 1$　③ $x \ge 1$

④ 해는 없다.　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2)$, $x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2$, $x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

17. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1>0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하면?

① $k<1,\ k>2$ ② $1<k<2$ ③ $-2\le k\le 2$

④ $k\le 1,\ k>2$ ⑤ $1\le k<2$

해설

ⅰ) $k\ne 1$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면

판별식이 0보다 작아야 한다

$$D'=(k-1)^2-(k-1)<0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-2)<0$$

$$\Rightarrow \quad 1<k<2$$

ⅱ) $k=1 \Rightarrow \quad 1>0$ 성립

$\therefore k$의 범위 : $1\le k<2$

18. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$　　② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$　　④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

19. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하
② 10만원 이상 15만원 이하
③ 5만원 이상 10만원 이하
④ 4만원 이상 8만원 이하
⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$
$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$
$\therefore 5 \leq x \leq 10$
10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

20. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\leq 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\leq 0 \Rightarrow f(k)\leq 0$

$\Rightarrow -4\leq k\leq 2$

$\Rightarrow -4\leq g(x)\leq 2$

$\Rightarrow 15\leq x^2\leq 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

21. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2}<k<0$ ② $1<k<\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$
④ $-2<k<-\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}<k<1$

해설

i) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \ \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠ $\times 3-$ ㉡ $-$ ㉢에서
$4x=-2k^2-k+3$
$=-(2k+3)(k-1)>0 \cdots$ ㉣
㉡ $\times 3-$ ㉢ $-$ ㉠에서
$4y=-2k^2+3k-1$
$=-(2k-1)(k-1)>0 \cdots$ ㉤
㉢ $\times 3-$ ㉠ $-$ ㉡에서
$4z=6k^2-k-1$
$=(3k+1)(2k-1)>0 \cdots$ ㉥

ii) ㉣ 에서 $-\frac{3}{2}<k<1$

㉤에서 $\frac{1}{2}<k<1$

㉥에서 $k<-\frac{1}{3}, k>\frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2}<k<1$

22. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$x^2-2x-3>3x-3$, $x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$, $x<0$ 또는 $x>5$

$\therefore x>5$

2) $x<1$ 일 때,

$x^2-2x-3>-3x+3$, $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$, $x<-3$ 또는 $x>2$

$\therefore x<-3$

1), 2) 에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가

$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로

$a<0$ 이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$ 이다.

$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$ 에서

$a=-1, c=15$ $\quad \therefore a+c=14$

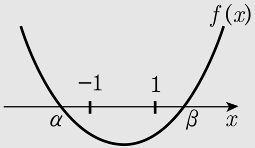
23. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p의 값의 범위는 ?

① $p>-2$　② $p>-1$　③ $p<-2$

④ $p<-1$　⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0 \quad \therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0 \quad \therefore p<-\dfrac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

24. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $2 < a < \frac{5}{2}$
③ $-2 < a < 4$
④ $-2 < a < \frac{5}{2}$
⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

25. x에 관한 이차방정식 $x^2+ax+a^2-2a=0$이 실수 해 α, β를 가질 때 $\alpha\beta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M+m$은 ?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{6}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

해설

준 방정식의 판별식

$D=a^2-4(a^2-2a)\geq 0$ ($\because$ 실수해를 가지므로)

$a^2-4a^2+8a\geq 0$, $\;-3a^2+8a\geq 0$

$3a^2-8a\leq 0$, $\;a(3a-8)\leq 0$

$\therefore\; 0\leq a\leq \frac{8}{3}$

또, 근과 계수와의 관계에서

$\alpha\beta=a^2-2a=(a-1)^2-1$

$\therefore$ $\alpha\beta$의 최솟값은 $a=1$일 때, -1, 최댓값은 $a=\frac{8}{3}$일 때, $\frac{16}{9}$

$\therefore\; m+n=\frac{16}{9}-\frac{9}{9}=\frac{7}{9}$