

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원
 $\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

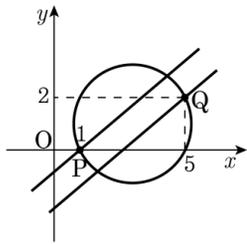
2. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

- ① 3π ② 2π ③ π ④ $\frac{1}{2}\pi$ ⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x+1)^2 + y^2 = 1$
중심 $(-1, 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로 그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.

따라서 구하는 원의 중심은 \overline{PQ} 의 중점 $C(3, 1)$ 이므로,

$$r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ 이다.}$$

4. 점 (1, 5), (-2, -4), (5, 3)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①은 세 점 (1, 5), (-2, 4), (5, 3)을 지나므로 연립방정식은

$$26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$$

②, ③, ④에서 연립방정식을 풀면

$$A = -2, B = 0, C = -24 \cdots \textcircled{5}$$

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

i) $\textcircled{1}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

ii) $\textcircled{1}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

- ① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$
④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

7. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$
 $4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$
 $\therefore a = -4, b = -1$
 $\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$

8. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

9. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

10. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k \leq 4$

② $\frac{1}{4} \leq k \leq 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(k-4)k > 0$$

$$\Rightarrow k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

11. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면 제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면 중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 (2, 1) 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

12. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

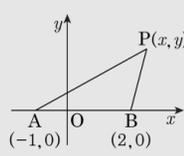
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



13. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

14. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5cm, 12cm 이고 중심거리가 13cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

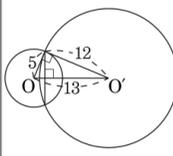
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



15. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

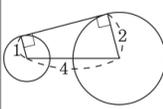
$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
 $\overline{C_1C_2} = 5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

16. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면
 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



17. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

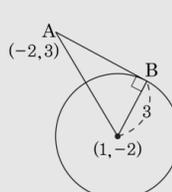
19. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 &= 0 \\(x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 3^2 \\ \text{원의 중심은 } (1, -2), \text{ 반지름은 } 3 \text{ 이므로} \\ \overline{AB} &= \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5\end{aligned}$$



20. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -12 ② -11 ③ -10 ④ -5 ⑤ -2

해설

접점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - y = 5$$

$$\Rightarrow y = 2x - 5 \quad \therefore ab = -10$$

21. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

\therefore (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

22. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $Q(x + y, x - y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

- ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$X = x + y, Y = x - y$ 로 놓고, x, y 에 관하여 연립하여 풀면

$$x = \frac{1}{2}(X + Y),$$

$$y = \frac{1}{2}(X - Y)$$

이것을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$X^2 + Y^2 = (\sqrt{2})^2$$

따라서 구하는 넓이는 $\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

24. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

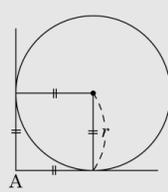
$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

25. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다. 따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

26. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

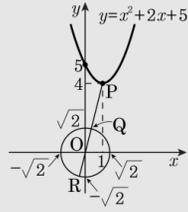
해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP} - (\text{반지름의 길이})$ 이고, 최댓값은 $\overline{OP} + (\text{반지름의 길이})$ 가 된다.

따라서, 구하는 최소 길이는 \overline{PQ} 이고,

최대 길이는 \overline{PR} 이므로

$$|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$$

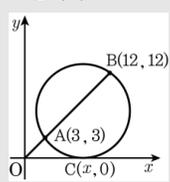


27. 좌표평면 위의 두 점 $(3, 3)$, $(12, 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$$

28. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 4$ 가 원 $(x-5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} - 2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$

30. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
 ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
 ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

31. A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 6 = 0, 2x + y - 4 = 0$

② $x - 2y - 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$

③ $x - 2y - 4 = 0, 2x + y - 5 = 0$

④ $x - 2y - 3 = 0, 2x + y - 4 = 0$

⑤ $x - 2y - 2 = 0, 2x + y - 3 = 0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면, $y = m(x - 3) - 1$ 접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, -2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은 $x - 2y - 5 = 0$ or $2x + y - 5 = 0$

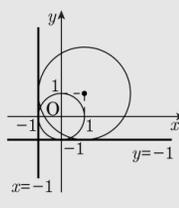
32. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

- ① $x = -2, y = -1$
- ② $x = 1, y = 1$
- ③ $x = -1, y = 1$
- ④ $x = 1, y = -1$
- ⑤ $x = -1, y = -1$

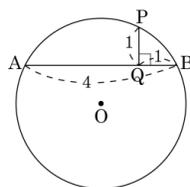
해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x = -1, y = -1$



33. 다음 그림과 같이 한 원 O의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $AB=4$, $PQ=\overline{BQ}=1$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 \overline{PQ} 의 연장선과 원 O의 교점을 P' 이라 하면
 $\overline{P'Q} = 3$ ($\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ}$)
 또, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면
 원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로
 $\overline{NB} = \overline{PM} = 2$
 따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로
 $\square OMQN$ 은 정사각형이다.
 $\therefore \overline{OM} = 1, \overline{PM} = 2$
 그러므로 피타고라스의 정리에 의하여
 $r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $r^2 = 5$

