1. 두 점 $A(-4)$, $B(6)$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

$\overline{AB} = |6 - (-4)| = 10$

2. 세 점 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(-5,-1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형 ② 예각삼각형

③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$
$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 에서

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형이다.

3. 두 점 A(3, 4), B(1, 6)의 중점 G의 좌표는?

① G(−2, 5) ② G(2, −5) ③ G(2, 5)

④ G(−2, −5) ⑤ G(2, 0)

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이므로

$G\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$,

즉 G(2, 5)

4. 세 점 $(3, 1)$, $(-2+a, 4)$, $(7, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 점 $A(3, 1)$, $B(-2+a, 4), C(7, a)$가
동일 직선 위에 있으려면
(직선 AB 의 기울기)= (직선 BC 의 기울기) 이므로

$$\frac{4-1}{-2+a-3} = \frac{a-4}{7-(-2+a)}$$

$$\frac{3}{a-5} = \frac{a-4}{9-a}$$

$27-3a = a^2-9a+20$

$a^2-6a-7 = (a+1)(a-7) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 7$

따라서 양수 a 의 값은 7

5. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y-a^2+4=0 \\ (a+1)x+2y-10=0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 실수 a의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 존재하지 않는다

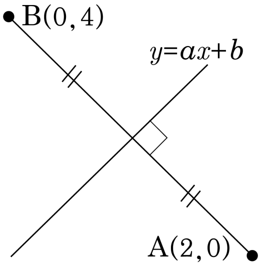
해설

주어진 연립방정식의 해가
무수히 많기 위해서는 두 직선

$$\frac{a+1}{2}=\frac{2}{1}=\frac{-10}{-a^2+4}$$

$\therefore\ a=3$

6. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



① 4　　② 2　　③ 1　　④ -2　　⑤ -4

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $\frac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 M 은

$\mathrm{M}(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, 2)$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1) \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

7. 원점을 중심으로 하고, 점 $(3,\ -4)$를 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+2y^2=41$　② $2x^2+y^2=34$　③ $x^2+y^2=25$

④ $x^2+y^2=16$　⑤ $x^2+y^2=9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$x^2+y^2=r^2 \cdots\cdots$ ㉠

㉠ 이 점 $(3,\ -4)$ 를 지나므로

$3^2+(-4)^2=r^2 \quad \therefore\ r^2=25$

이 때, ㉠은 $x^2+y^2=25$

8. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$ ······ ㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2$ ······ ㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2$ ······ ㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}\quad (\because\ r > 0)$

9. 두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

10. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$ 에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $\mathrm{B}'(3,\ -4)$

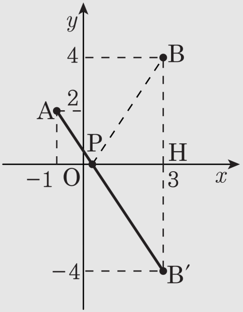
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최소거리는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$의 최소 거리와 같고

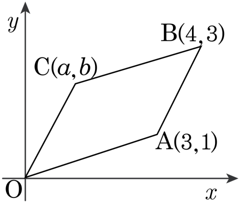
세 점 A, P, B′이 직선 위에 있을 때

가장 짧은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이 최소거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



11. 다음 그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$$

$\dfrac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\dfrac{b+1}{2}=\dfrac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore a+b=3$

12. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = 13$, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

13. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\cdot\alpha+3\cdot 0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$\therefore |4\alpha+2|=10$

$4\alpha+2=\pm 10$

$\therefore \alpha=2,\ -3$

$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

14. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

15. 점 $A(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

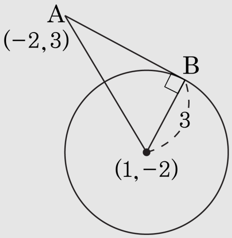
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



16. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$ax+by=9$ 이고

이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$

17. 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,-3)$에서 원에 그은 접선의 x절편은?

① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1,-3)$에서 그은 접선의 방정식은

$1\,x-3\,y=10$

x절편은 $y=0$일 때의 x좌표이므로 $x=10$

18. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

19. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$
② $3x+2y=0$
③ $6x-4y+9=0$
④ $-3x+2y=0$
⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$

정리하면 $-6x+4y=0$

$\therefore -3x+2y=0$

20. 세 점 A(1, 6), B(−2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$
$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$
$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$
$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$
$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$
$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$
이때, a, b는 실수이므로
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은
$a=1$, $b=3$일 때 최소이다.
$\therefore a+b=4$

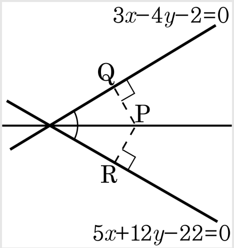
21. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

22. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

23. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

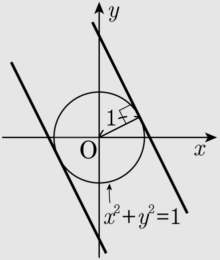
▶ **답 :**

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ **정답 :** 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

24. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

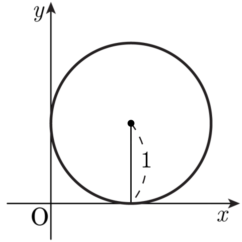
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle\mathrm{AOB}=90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore\ abc=0$

25. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1}=k$라 하면 직선 $y+2=k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1,-2)$를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$|2k-3|=\sqrt{k^2+1}$

$4k^2-12k+9=k^2+1$

$3k^2-12k+8=0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

26. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle$ABC에서 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC의 무게중심과 일치한다.

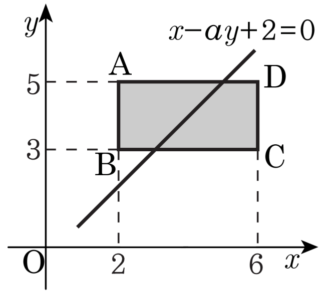
$\triangle$ABC의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$이므로 $\triangle$DEF의 무게중심은 $(1,\ 1)$이다.

$\therefore\ a+b=1+1=2$

27. 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x-ay+2=0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

즉 $(4,4)$ 이다.
직선 $x-ay+2=0$ 이 점 $(4,4)$ 를 지나야 한다.
따라서 $(4,4)$ 를 대입하면 $4-4a+2=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

28. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$$

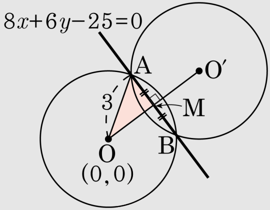
$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

29. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2}\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

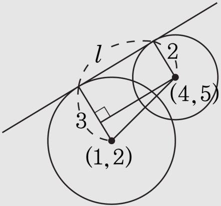
30. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$, $(x-4)^2+(y-5)^2=4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$\therefore \quad l = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2-1^2} = \sqrt{17}$



31. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6 ② 9 ③ -6 ④ -9 ⑤ 4

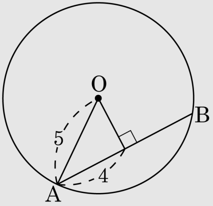
해설

$$\begin{cases} y = x + k \quad \cdots ㉠ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면

$\overline{\text{AB}} = 8$, $\overline{\text{OA}} = 5$ 이므로

점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



$$\frac{|3+k|}{\sqrt{1+1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$$

k 값의 합 $\Rightarrow \ -6$

32. 원 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 위를 움직이는 점 P 에서 직선 $3x+4y=10$ 까지의 거리를 $d(p)$ 라 할 때 $d(p)$ 의 최소값은 ?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2+4x+2y+4=0 \Leftarrow (x+2)^2+(y+1)^2=1$
$d(p)$ 의 최소값은 원의 중심 $(-2,-1)$ 에서
직선 $3x+4y=10$ 까지 거리에서 반지름을 뺀 값이므로

$$\frac{|3\times(-2)+4(-1)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}-1=\frac{20}{5}-1=3$$

33. 점 P(a, b) 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 P(a, b), Q(a, 0), O(0, 0) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0$, $b > 0$ 이라 하면

$\triangle$POQ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$

$ab \leq \frac{1}{2}$

$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$