

1. 두 점 $A(5, -11)$, $B(-4, 7)$ 일 때, 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점의 좌표는 $P(a, b)$, 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점의 좌표는 $Q(c, d)$ 이다. 이때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$P(a, b) = \left(\frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (5)}{2 + 1}, \frac{2 \cdot 7 + 1 \cdot (-11)}{2 + 1} \right)$$

$$= (-1, 1)$$

$$Q(c, d) = \left(\frac{2 \cdot (-4) - 1 \cdot (5)}{2 - 1}, \frac{2 \cdot 7 - 1 \cdot (-11)}{2 - 1} \right)$$

$$= (-13, 25)$$

$$\therefore a + b + c + d = -1 + 1 - 13 + 25 = 12$$

2. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $A(1, 2)$ 에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x + y + 5 = 0$

② $-2x + y - 3 = 0$

③ $x - y + 5 = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad \therefore x + 2y - 5 = 0$$

3. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$ 에 의하여 직선 $2x + y + 5 = 0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y + 2 = 0$ ③ $2x + y + 6 = 0$

④ $2x + y + 8 = 0$ ⑤ $2x + y + 9 = 0$

해설

$x' = x - 2$, $y' = y + 1$ 이라 하자.

x, y 를 원래 식에 대입하면,

$$2(x' + 2) + (y' - 1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x' + y' + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 8 = 0$$

4. 점 (2, 3) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 (2, 3) 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 (2, 3) 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$

이 점은 x 축으로 -4, y 축으로 -6만큼 평행이동 시킨 것과 같다

$$\therefore m + n = -4 - 6 = -10$$

5. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $P^c \subset Q$

③ $Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$

⑤ $P^c \cap Q^c = \emptyset$

해설

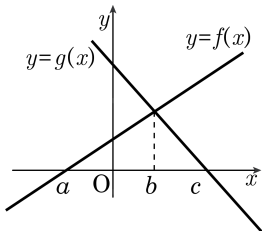
명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$$P \subset Q^c$$

$$\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$$

$$\Leftrightarrow Q \subset P^c$$

6. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \geq 0$ 의 해는?



① $a \leq x \leq b$

② $a \leq x \leq c$

③ $b \leq x \leq c$

④ $x \leq b, x \geq c$

⑤ $x \leq a, x \geq c$

해설

$f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지의 경우가 있다.

$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0, g(x) \leq 0$

그런데 그래프에서 $f(x) \leq 0, g(x) \leq 0$ 의 경우는 없으므로 $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ 을 만족하는 x 의 범위를 구하면 된다.

주어진 함수의 그래프를 살펴 보면

$x \leq a$ 일 때, $f(x) \leq 0, g(x) \geq 0$

$a \leq x \leq c$ 일 때, $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$

$x \geq c$ 일 때, $f(x) \geq 0, g(x) \leq 0$

따라서 구하는 해는 $a \leq x \leq c$

7. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

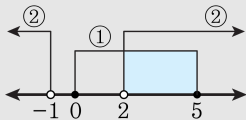
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$$\therefore x < -1, x > a \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \leq 5$ 이므로 a 의 값은 2이다.



8. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로
 $1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

9. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$

㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면

접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$2x_1 + 4y_1 = 4, x_1 + 2y_1 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$

또, 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

10. 직선 $3x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 한 후 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $3x - 4y + 12 = 0$

② $3x - 4y - 4 = 0$

③ $4x - 3y + 12 = 0$

④ $-4x + 3y + 12 = 0$

⑤ $-4x + 3y - 4 = 0$

해설

1) x 축으로 -1 , y 축으로 2 만큼 평행이동

$$\Rightarrow 3(x + 1) - 4(y - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$$

2) $y = x$ 대칭

$$\Rightarrow -4x + 3y + 12 = 0$$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{a, b, e\}$ 이고, $A \cap B = \{b, e\}$, $A \cup B = \{a, b, d, e, h\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{a, d, e, h\}$

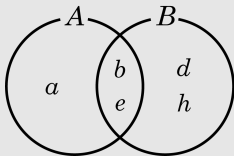
② $\{b, d, e, h\}$

③ $\{b, e, h\}$

④ $\{d, e, h\}$

⑤ $\{d, e\}$

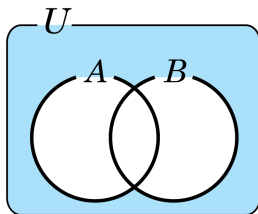
해설



$\therefore B = \{b, d, e, h\}$

12. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$A = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, B = \{2, 3, 5, 8\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $\{2, 3, 4\}$

② $\{2, 5, 6\}$

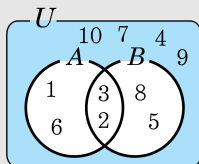
③ $\{4, 5, 6\}$

④ $\{4, 7, 8, 9\}$

⑤ $\{4, 7, 9, 10\}$

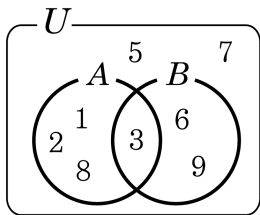
해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로



색칠한 부분은 $\{4, 7, 9, 10\}$ 이다.

13. 다음 벤 다이어그램을 보고, $A^c \cup B^c$ 에 속하지 않는 원소는?



① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 8

해설

$$A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

14. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

15. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 x g 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \leq x \leq 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\text{g})$ 이다.

따라서 물 x g 을 뺀을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \geq 100 \\ x \leq 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \leq x \leq 150$ 이다.

16. 부등식 $(x-2)(ax-1) < 0$ 의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a 가 있다.

② $a = 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.

③ $a < 0$ 이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.

④ $a > 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.

⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$ 일 때

$$(x-2)(ax-1) = a(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) \text{이므로}$$

$a = \frac{1}{2}$ 이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a = 0$ 이면 이 부등식은 $-(x-2) < 0$,
즉 $x-2 > 0$ 이므로 해는 $x > 2$ 이다.

③ $a < 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) > 0$ 이므로
 $x < \frac{1}{a}$ 또는 $x > 2$ 이다.

④ $a > 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) < 0$ 이므로

$a < \frac{1}{2}$ 일때, $2 < x < \frac{1}{a}$,

$a > \frac{1}{2}$ 일때 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.

17. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 $A(0, 6)$, $B(2, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{AP}$ 의 길이를 구하면?

① 2

② $\sqrt{5}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{10}$

⑤ 5

해설

$x + y = 2$ 위에 있는 점 P 는
 $(\alpha, -\alpha + 2)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$\alpha^2 + (-\alpha - 4)^2 = (\alpha - 2)^2 + (-\alpha)^2$$

$$\alpha = -1$$

$$P(-1, 3)$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

18. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ 2

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은

k 의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$

의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$

즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로

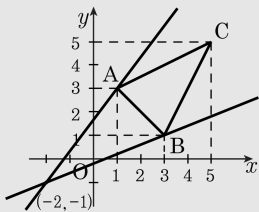
이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1, \quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1, \quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$$



19. 반지름이 20인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 16개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현 CD이다.

$$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32, \overline{AB} = 40$$

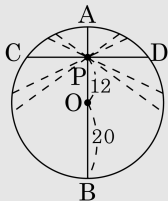
점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40 사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32, 40인 것이 한 개,

33, 34, 35, 36, 37, 38, 39인 것이 각각 두 개씩 있다.

∴ 16개



20. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$

② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10, 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10, 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

21. 양의 유리수 a 에 대하여 $n^2 \leq a < (n+1)^2$ 을 만족하는 정수 $n = P(a)$ 로 정의한다. $P(x) = 4, P(y) = 6$ 일 때, $P(y-x)$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

해설

$$P(x) = 4 \text{ 이므로 } 4^2 \leq x < 5^2 \quad \therefore 16 \leq x < 25$$

$$P(y) = 6 \text{ 이므로 } 6^2 \leq y < 7^2 \quad \therefore 36 \leq y < 49$$

따라서 $11 < y - x < 33$

즉, $3^2 < y - x < 6^2$ 이므로 $P(y-x)$ 가 될 수 있는 값은 3, 4, 5

22. 좌표평면 위에 있는 세 점 $A(2, 10), B(-8, -14), C(10, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, D 의 좌표는?

① $D(5, 1)$

② $D(5, -1)$

③ $D(-5, 1)$

④ $D(-5, -1)$

⑤ $D(2, -3)$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이다.}$$

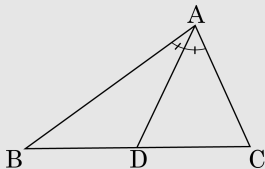
$$\overline{AB} = 26, \overline{AC} = 10 \text{ 이고}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이므로}$$

D 는 $\overline{BC}$ 를 $13 : 5$ 로 내분하는 점이다.

$$D \left(\frac{13 \times 10 + 5 \times (-8)}{13 + 5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-14)}{13 + 5} \right)$$

$$\therefore D(5, -1)$$



23. 자연수 n 에 대하여 집합 $A_n = \left\{ x \mid <x> - x = \frac{1}{2n} \right\}$ 으로 정할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $<x>$ 는 x 보다 작지 않은 최소 정수이다.)

㉠ 자연수 i, j 에 대하여 ($i \neq j$), $A_i \cap A_j = \emptyset$

㉡ $\frac{1994}{4} \in A_2$

㉢ $A_2 \subset A_1$

㉣ $-\frac{7}{6} \in A_3$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$<x>$ 를 k 라 하면 $k-1 < x \leq k$

$$<x> - x = \frac{1}{2n} \Leftrightarrow x = <x> - \frac{1}{2n}$$

$$A_n = \left\{ k - \frac{1}{2n} \mid k \text{는 정수} \right\}$$

$$A_1 = \left\{ \cdots - \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \cdots - \frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \cdots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \cdots - \frac{13}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \cdots \right\}$$

따라서,

자연수 i, j 에 대하여 $\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\frac{1994}{4} = 498 + \frac{2}{4} \notin A_2,$$

$$-\frac{7}{6} \in A_3$$

24. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합일 때, 다음 중 반드시 유한집합을 모두 고르면 ? (정답 2개)

① $A^c \cap B$

② $(A \cap B)^c$

③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 X

④ $A - B$

⑤ $A^c \cap B^c = \emptyset$ 일 때, B^c

해설

$A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합이므로 B 는 무한집합이다.

① $A^c \cap B \rightarrow A^c$ 도 B 도 무한집합이지만, 두 무한집합의 교집합은 무한집합일 수도 유한집합일 수도 있다.

② $(A \cap B)^c \rightarrow A \cap B$ 가 유한집합이므로 $(A \cap B)^c$ 는 무한집합이다.

③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 $X \rightarrow B \subset X$ 이므로 무한집합이다.

④ $A - B$ 는 유한집합 차집합 무한집합이므로 항상 유한집합이다.

⑤ $A^c \cap B^c = \emptyset$ 일 때, $(A \cup B)^c = \emptyset$, $A \cup B = U$ 이므로 B^c 는 유한집합이다.

25. 수학 문제집이 A, B, C 세 종류가 있다, 각 문제집을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때, $n(A) = 6, n(B) = 8, n(C) = 11$ 이고 $n(A \cap B) = 4, n(A \cap B \cap C) = 2$ 이다. 세 문제집 중 적어도 한 문제집을 갖고 있는 학생수를 x 라 할 때, x 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

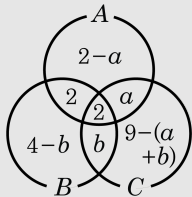
해설

$$n(A \cap B \cap C^c)$$

$$= n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 4 - 2 = 2 \text{ 이}$$

$$\text{므로, } n(A \cap B^c \cap C) = a, n(A^c \cap B \cap C) = b$$

라 하면 벤 다이어그램을 그려서 나누어지는 7개 부분의 원소의 개수는 다음 그림과 같다.



이 때, $a \geq 0, b \geq 0, 2 - a \geq 0, 4 - b \geq 0, 9 - (a + b) \geq 0$ 이므로 4개의 부등식에서 $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 4$ 이고 $\therefore 0 \leq a + b \leq 6$ 이것은 마지막 부등식을 만족시킨다.

$x = n(A \cup B \cup C) = 19 - (a + b)$ 이므로 (그림에서 7개 부분을 모두 더한 값이다.)

$$\therefore 13 \leq x \leq 19$$

따라서 x 의 최솟값은 13이다.