1. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

2. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

3. 점 A(2, 1)를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(2-1,\ \ 1+4)=(a,\ b)$ 따라서 $a+b=6$

4. 다음 중 옳은 것은?

① $0 \in \{0, 1\}$ ② $3 \in \{2, 5\}$

③ $5 \notin \{1, 3, 5, 7\}$ ④ $\{1\} \in \{1, 5, 9\}$

⑤ $12 \in \{1, 2, 9, 18\}$

해설

② $3 \notin \{2, 5\}$

③ $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$

④ $\{1\} \subset \{1, 5, 9\}$

⑤ $12 \notin \{1, 2, 9, 18\}$

5. 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{a,\ b\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $a \subset A$ ② $\varnothing \in A$ ③ $B \not\subset A$

④ $A \not\subset B$ ⑤ $\{a,\ b,\ c\} \subset A$

해설

① $a \in A$

② $\varnothing \subset A$

③ $B \subset A$

6. 두 원 $x^2+(y-1)^2=4$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$가 서로 내접할 때, 실수 a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=9$
② $(a-1)^2+b^2=9$
③ $a^2+(b-1)^2=9$
④ $(a-1)^2+b^2=16$
⑤ $a^2+(b-1)^2=16$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0,\ 1)$, $(a,\ b)$이므로
중심거리는 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}$
내접하면 중심거리가 두 원의 반지름의 길이의 차와 같으므로
$\sqrt{a^2+(b-1)^2}=5-2$
양변을 제곱하면 $a^2+(b-1)^2=9$

7. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

8. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 7)$ 인 포물선을 얻을 수 있다. 이때, $b - a$ 의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$y - b = (x - a)^2 + 3$
$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$
이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로
$a = 3, b + 3 = 7$　　$\therefore b = 4$
$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$

9. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 과 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ ② $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ ④ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

⑤ $x^2+y^2=1$

해설

$y=-x$ 에 대해 대칭이므로

원의 방정식에 x 대신 $-y$ 를, y 대신 $-x$ 를 대입 한다.

$\Rightarrow \quad (-y-1)^2+(-x+2)^2=1$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=1$

10. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

11. 집합 $A = \{x \mid x = 3 \times n - 1,\ n$는 5 미만의 자연수$\}$일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$A = \{2,\ 5,\ 8,\ 11\}$이므로 모든 원소의 합은

$2 + 5 + 8 + 11 = 26$

12. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.

② 두 자연수 m, n 에 대하여 m^2+n^2 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \le 0$ 이다.

⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m=2$, $n=1$ 인 경우

13. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore\ P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

14. $a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면?

① $-4 \le ax+by \le 4$ ② $-9 \le ax+by \le 9$

③ $-6 \le ax+by \le 6$ ④ $0 \le ax+by \le 36$

⑤ $-36 \le ax+by \le 36$

해설

$a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$이면

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$에서

$4 \cdot 9 \ge (ax+by)^2$

$\therefore -6 \le ax+by \le 6$

15. 두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4y-1=0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$ ② $\dfrac{\sqrt{95}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{95}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{95}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-2x-\left(x^2+y^2-4y-1\right)=0$

$-2x+4y+1=0,\ 2x-4y-1=0\cdots\cdots$ ㉠

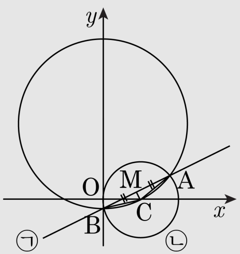
$x^2+y^2-2x=0$ 에서

$(x-1)^2+y^2=1\cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C $(1,0)$이라 하면

중심 C $(1,0)$에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\mathrm{CM}}$은

$$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$



원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\cdot\frac{\sqrt{95}}{10}=\frac{\sqrt{95}}{5}$$

16. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 기울기를 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$　　② $-\frac{8}{3}$　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m인 접선을
$y-2=m(x-2)$ 즉, $mx-y-2m+2=0$
이라고 하면
원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m+2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-8m+3=0$
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

17. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4,\ 3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0,\ (n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

18. 두 점 $\mathrm{A}(-3,6)$, $\mathrm{B}(8,-1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3,6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a,b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'}\perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$ 의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7,2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{BP}}\leq\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$ 의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7,2)$, $\mathrm{B}(8,-1)$, $\mathrm{P}(m,n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 l위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2,1)$

19. 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $A \not\subset C$	㉡ $C \subset B$	㉢ $a \in C,\ b \in C$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $a \in C,\ b \in C,\ c \notin C$ 이다.
따라서 집합 C 는 a 와 b 를 포함하고 c 를 포함하지 않는 B 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

20. 두 조건 p, q가 $p\ :|x|<a$, $q\ :|x-1|\geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0<a\leq 4$ ② $a>4$ ③ $a\geq 4$

④ $a>2$ ⑤ $2\leq a\leq 4$

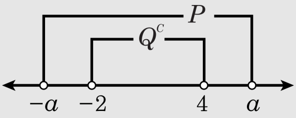
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\}$

$Q^c=\{x|-2<x<4\}$



$-a\leq -2 \rightarrow a\geq 2$, $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

21. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$의 두 부분집합 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5\}$에 대하여 $A \cap X = B \cap X$를 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$1 \in X$이면 $1 \in (A \cap X)$, $1 \notin (B \cap X)$, $5 \in X$이면 $5 \notin (A \cap X)$, $5 \in (B \cap X)$이므로 $A \cap X \neq B \cap X$이다. 따라서 U의 원소 중 1과 5는 집합 X의 원소가 될 수 없고, 나머지 다른 원소들은 X의 원소가 되거나 되지 않아도 주어진 조건은 성립한다. 즉, 집합 X는 1과 5를 포함하지 않는 U의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore$ X 의 개수는 $2^4 = 16$(개)이다.

22. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.
전체집합
$U = \{x | x \leq 60,\ x\text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x | x\text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{x | x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$, $C = \{x | x\text{는 } 8\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
,
$A = \{x | x\text{는} 4\text{의 배수}\}$
$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,$
$52, 56, 60\},$

$B = \{x | x\text{는} 6\text{의 배수}\}$
$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\}$,

$C = \{x | x\text{는} 8\text{의 배수}\}$
$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$,

$(A \bullet B) \bullet C$
$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54,$
$56\} \bullet C$
$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$
$\therefore (A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값$= 54$

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $[A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (B^c \cap A^c)^c] = U$, $A \cap B^c = A$ 일 때, $n(A \cup B)$ 와 같은 것은?

① $n(A^c \cap B^c)$

② $n(U) - n(A^c)$

③ $n(A) + n(A \cap B)$

④ $n(A \cup B) - n(A)$

⑤ $n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B)$

해설

$A \cap B^c = A$ 이면 A 와 B 는 서로소인 집합이다.

$[A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (B^c \cap A^c)^c] = U$

$\rightarrow$ $[A \cup B] \cap [B \cup (A \cup B)] = U$ $\rightarrow$ $A \cup B = U$

$\rightarrow$ $n(U) = n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

① $n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 0$

② $n(U) - n(A^c) = n(U) - n(B)$

③ $n(A) + n(A \cap B) = n(A)$

④ $n(A \cup B) - n(A) = n(B)$

⑤ $n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B) = n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) = n(A \cup B)$

24. 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

① 50개 ② 66개 ③ 67개 ④ 76개 ⑤ 78개

해설

문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\leq 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인 $81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in \mathrm{A} \to 3\mathrm{b} \notin \mathrm{A} \to 9\mathrm{b} \in \mathrm{A} \to 27\mathrm{b} \notin \mathrm{A} \to 81\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ 와 같이 된다.
결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개).
따라서 구하는 최대값은 $67 + 8 + 1 = 76$

25. x의 삼차방정식 $x^3-ax^2+bx-27=0$이 세 개의 양의 실근을 갖는다. 이 때, 실수 a, b에 대하여 a의 최소값과 b의 최소값의 차는?

① 6　② 12　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=a$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=27$
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면
$a=\alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$
$=3\sqrt[3]{27}=9$
$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=27$
$\therefore\ 27-9=18$