1. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 7)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3)$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-1-2)^2+(3-7)^2} = 5$$

2. 두 점 $\mathrm{A}\,(-5,1)$, $\mathrm{B}\,(3,5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(0,0)$　　② $(0,1)$　　③ $(0,3)$

④ $(0,4)$　　⑤ $(0,-1)$

해설

y 축 위의 점을 $\mathrm{Q}\,(0,a)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{QB}}$

$\therefore (0+5)^2+(a-1)^2=(0-3)^2+(a-5)^2$

정리하면 $a=1$　　$\therefore \mathrm{Q}\,(0,1)$

3. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$

④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}} &= \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2} \\ &= \sqrt{2a^2-2a+5} \\ \overline{\mathrm{PB}} &= \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2} \\ &= \sqrt{2a^2-6a+9}\end{aligned}$$

그런데 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5=2a^2-6a+9$

$4a=4$ 에서 $a=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(1,\ 1)$

4. 두 점 A $(-2,\ 0)$, B $(7,\ 0)$에서 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는?

① $P(4,\ 0),\ Q(16,\ 0)$

② $P(2,0),\ Q(-16,0)$

③ $P(4,0),\ Q(-8,0)$

④ $P(4,0),\ Q(4,0)$

⑤ $P(-4,0),\ Q(16,0)$

해설

내분점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{-2\times1+7\times2}{2+1},\ \frac{0\times1+0\times2}{2+1}\right)$$

$\therefore\ P(4,\ 0)$

외분점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\times1+7\times2}{2-1},\ \frac{-0\times1+0\times2}{2-1}\right)$$

$\therefore\ Q(16,\ 0)$

5. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심이 $\mathrm{G}(a,\ b)$이다. $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 0

해설

세 점의 좌표를 알 때
무게중심을 구하는 공식에서
$a=(1+2+3)\div 3=2, b=(3+2+1)\div 3=2$
따라서 $a+b=2+2=4$

6. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 높이가 같으므로
$\triangle$AOC 와 $\triangle$BOC 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle$AOC 의 넓이는 $\triangle$BOC 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

7. $m>0$ 이고, 두 점 $(m,\ 3)$, $(1,\ m)$ 이 기울기가 m 인 직선 위에 있을 때, m 은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

기울기$=\dfrac{m-3}{1-m}=m$, $m^2=3$

$\therefore m=\sqrt{3}(\because m>0)$

8. 좌표평면에 두 점 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(2, -1)$이 있다. 점 $\mathrm{C}(m, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BC}}$가 최소일 때의 상수 m의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

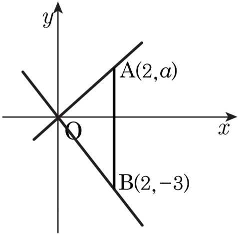
해설

$\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BC}}$가 최소인 경우는
세 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$가 일직선 위에 있을 때이므로
직선 AB의 기울기와 BC의 기울기가 같다.

따라서 $\frac{-1-3}{2-1} = \frac{2-(-1)}{m-2}$

$\therefore m = \frac{5}{4}$

9. 다음 그림과 같이 원점과 점 A(2, a) 를 지나는 직선의 기울기를 m_1, 원점과 점 B(2, -3) 을 지나는 직선의 기울기를 m_2 라 하자. $m_1 \times m_2 = -1$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$m_1 = \frac{a}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 \times m_2 = \frac{a}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ 이므로,

$\therefore\ a = \frac{4}{3}$

10. 두 직선 $ax - y + 3 = 0, 4x + 2y + (1 - b) = 0$이 일치할 때, ab의 값은?

① -14 ② -7 ③ 1 ④ 7 ⑤ 14

해설

두 직선 $ax - y + 3 = 0, 4x + 2y + (1 - b) = 0$이 일치하려면

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{1-b}$$

$\therefore a = -2, b = 7$

$\therefore ab = (-2) \cdot 7 = -14$

11. 점 $(4,\ 3)$과 직선 $5x-12y+3=0$ 사이의 거리를 d_1, 점 $(4,\ 3)$과 직선 $12x+5y-50=0$ 사이의 거리를 d_2라고 할 때, d_1과 d_2 사이의 관계는?

① $d_1=d_2$ ② $d_1=d_2+1$ ③ $d_1+1=d_2$

④ $d_1=d_2+2$ ⑤ $d_1+2=d_2$

해설

$$d_1=\frac{|5\cdot 4-12\cdot 3+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{169}}=1$$

$$d_2=\frac{|12\cdot 4+5\cdot 3-50|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{169}}=1$$

따라서 $d_1=d_2$

12. 두 직선 $4x - 3y - 4 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{5}$

해설

$4x - 3y - 4 = 0$ 의 x 절편 $(1, 0)$ 에서
$4x - 3y - 2 = 0$ 까지의 거리는

$$d = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2}{5}$$

13. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a+b+r$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

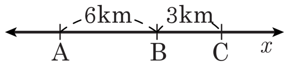
$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=-1+1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ 이므로

$\therefore \mathrm{C}(1,\ -2),\ r=2 \quad \therefore a+b+r=1$

14. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

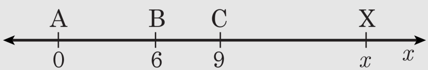


① 6 km　　② 9 km　　③ 12 km

④ 15 km　　⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A마을과 X마을 사이의 거리는

C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-9|$

곧, $|x| = 2|x-9|$

$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$

$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$

여기서 $x = 6$이면 X $=$ B가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6 = 12$(km)

15. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4), \mathrm{B}(6,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(2,0)$

$a+b=2$

16. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$　② $(2, 4)$　③ $(3, 5)$
④ $(5, 3)$　⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{\text{AD}}$의 중점과 $\overline{\text{BC}}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

17. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13,\ \overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D는 B, C를 $13 : 5$로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

18. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\quad 2a+b=0$

19. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z=(2-3i)(a+bi)$$
$$=(2a+3b)+(2b-3a)i\cdots㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

20. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$

② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$

④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{\mathrm{PA}})^2=(x-2)^2+y^2$

$(\overline{\mathrm{PB}})^2=x^2+(y-2)^2$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

21. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O′ 이 있다. 이 두 원의 반지름을 각각 r, r' 이라 하고 두 원의 중심 간의 거리를 d 라 할 때, 이 두 원의 성질을 옳게 나타낸 것은?

① $d > r + r'$

② $d < |r - r'|$

③ 공통외접선은 1개이다.

④ 공통내접선은 2개이다.

⑤ 두 원의 공통현은 1개이다.

해설

① $d < r + r'$
② $d > |r - r'|$
③ 공통외접선은 2개이다.
④ 공통내접선은 없다.

22. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

23. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

24. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

25. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

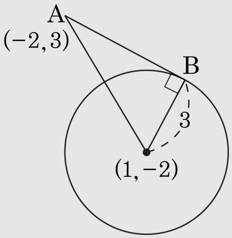
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



26. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

27. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $ax+by=13$ 이다. $a+b$ 의 값은?

① -13 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x+y_1y=r^2$ 을 이용하면,
$2x+3y=13$ $a=2, b=3$ $\therefore\ a+b=5$

28. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2,\ k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

29. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 0), B(5, 4)$에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 4 = 0$ ③ $x + y + 3 = 0$
④ $x - 3y + 4 = 0$ ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA} = \overline{PB}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$
$8x + 8y - 40 = 0$
$\therefore x + y - 5 = 0$

30. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$$
$$+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$$
$$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$$
$$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$$
$$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$$

이때, a, b는 실수이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은

$a=1$, $b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

31. 세 점 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{C}(1,2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$　② $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$　③ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　⑤ $\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 두면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$$
$$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

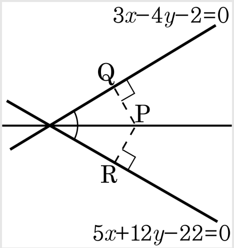
32. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

33. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

P$(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

34. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

35. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-4)^2 = 5^2$ 이므로

원의 중심은 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름은 5이다.

그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$까지의 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소거리는

$d-$(원의 반지름)$= 8 - 5 = 3$

36. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$

37. 원 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 과 함수 $y=\dfrac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\dfrac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\dfrac{9}{4x^2}=\dfrac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ \ x=\pm 1,\ \ \pm\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}\times 4=9$

38. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,

중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b = a + 1$

따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.

중심과 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로

$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$

$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a-5)^2 = (a+3)^2$

$16a = 16$

$\therefore\ a = 1$

$\therefore\ (a,\ b) = (1,\ 2)$

따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

39. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은?

① 2　　② -2　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $-\frac{1}{2}$　　⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$

$4x - ky + 10 = 0 \cdots ①$

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore\ k = 2,\ m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ m + k = -\frac{1}{2}$$

40. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0\ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0,$
$\therefore\ a^2=1$

41. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2,\ y = -1$　　② $x = 1,\ y = 1$

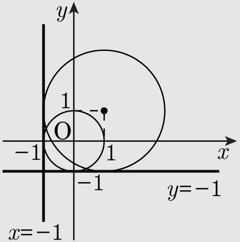
③ $x = -1,\ y = 1$　　④ $x = 1,\ y = -1$

⑤ $x = -1,\ y = -1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x = -1,\ y = -1$

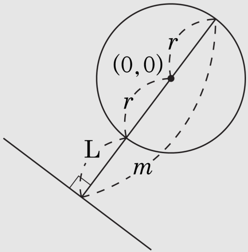


42. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $3x + 4y + 10 = 0$ 과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면

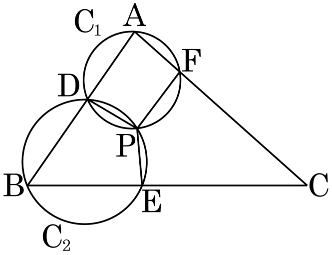
$$\frac{|0 \times 3 + 0 \times 4 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$\Rightarrow$ 반지름보다 크므로 위의 그림과 같이
직선이 원 밖에 위치한다.

$\therefore$ 최소거리는 $L =$ 중심사이의 거리-반지름
$= 2 - 1 = 1$

$\therefore$ 최대거리는 $m =$ 중심사이의 거리+반지름
$= 2 + 1 = 3$

43. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

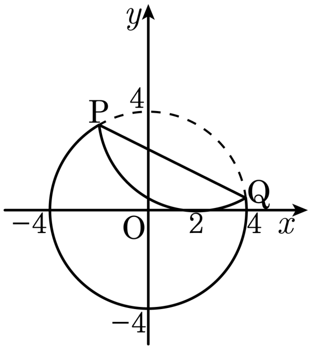
따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

44. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

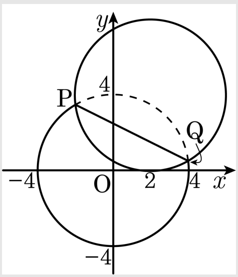


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16//$



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.