

1. 다음 <보기> 중 옳은 것은 모두 고르시오.

보기

㉠ $\{0\} \subset \{0\}$

㉡ $0 \notin \emptyset$

㉢ $\{0\} \subset \emptyset$

㉣ $\emptyset \in \{\emptyset, 0\}$

㉤ $\{a\} \subset \{a, b\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉤

해설

㉡ $0 \notin \emptyset$

㉢ $\{0\} \not\subset \emptyset$

2. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중에서 그 원소의 개수가 2개인 것의 개수를 구하면?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$X = \{1, 2, 4\}$$

원소의 개수가 2개인 X 의 부분집합 :

$$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$$

3. 두 집합 $A = \{1, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\emptyset$

② $\{5\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

해설

① $\{1, 7\} \not\subset \emptyset$

② $\{1, 7\} \not\subset \{5\}$

③ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$

④ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

4. 전체 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$ 일 때, $A - B^c$ 은?

① $\{1\}$

② $\{2\}$

③ $\{1, 2\}$

④ $\{1, 2, 5\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 5\}$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 $B^c = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ 이다.

따라서 $A - B^c = \{1, 2, 4, 8\} - \{2, 4, 6, 7, 8\} = \{1\}$ 이다.

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $B - A = \emptyset$

② $A \cup B = A$

③ $A \cap B^C = B$

④ $A^C \cup B = A$

⑤ $B^C \subset A^C$

해설

① $A - B = \emptyset$

② $A \cup B = B$

③ $A \cap B^C = \emptyset$

④ $A^C \cup B = U$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 60$, $n(A) = 37$, $n(A \cap B) = 22$, $n(A^c \cap B^c) = 5$ 일 때, $n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

$$n(A \cup B) = n(U) - n(A^c \cap B^c) = 60 - 5 = 55$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ 에서 } n(B) = n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) = 55 - 37 + 22 = 40$$

7. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

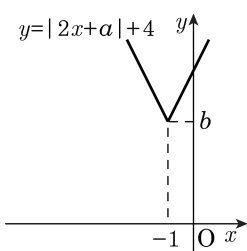
$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$$

$$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

8. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10



해설

$$y = |2x + a| + 4$$

$$= \left| 2 \left(x + \frac{a}{2} \right) \right| + 4$$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는
 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방
 향으로
 $-\frac{a}{2}$ 만큼,

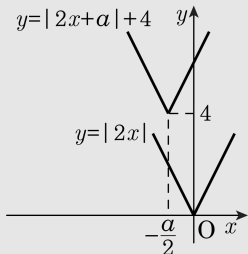
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -1, b = 4$$

$$\therefore a = 2, b = 4 \quad \therefore ab = 8$$



9. 직선 $y = 2x + 2$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1 ,
직선 l_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2 라 할 때, 직선 l_2 의
방정식은?

① $x - 2y - 2 = 0$

② $2x + y - 2 = 0$

③ $x + 2y - 2 = 0$

④ $2x + y + 2 = 0$

⑤ $x + 2y + 2 = 0$

해설

$y = 2x + 2$ 를 $y = x$ 에 대하여

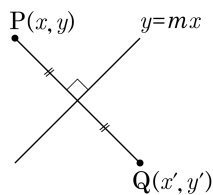
대칭이동한 직선 l_1 은 $x = 2y + 2$,

l_1 을 x 축에 대하여

대칭이동한 직선 l_2 는 $x = -2y + 2$ 이다.

따라서 직선 l_2 의 방정식은 $x + 2y - 2 = 0$

10. 다음은 직선 $y = mx$ 에 대한 점 $P(x, y)$ 의 대칭점을 구하는 과정이다. 빈 칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



대칭점을 $Q(x', y')$ 라 하면,

PQ 의 중점이 직선

$y = mx$ 위에 있으므로,

(가) = m (나),

또한 직선

PQ 와 직선 $y = mx$ 가 직교하므로

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \text{(다)}$$

(가), (나), (다) 에 의하여

$$x' = \frac{1}{1 + m^2} \{ (1 - m^2)x + 2my \}$$

$$y' = \frac{1}{1 + m^2} \{ 2mx - (1 - m^2)y \}$$

- ① (가): $y + y'$, (나): $x + x'$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ② (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ③ (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ④ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ⑤ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ 이므로

중점은 $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right)$ 이다.

(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow m \times \text{(다)} = -1$$

$$\therefore \text{(다)} : -\frac{1}{m}$$

11. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 9 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A^c = \{3, 5, 6, 7\}$

② $B - A = \{3, 5\}$

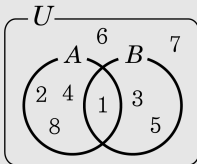
③ $A^c \cap B^c = \{6, 7\}$

④ $n(A \cup B) = 6$

⑤ $n((A \cap B)^c) = 8$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



⑤ $n((A \cap B)^c) = 7$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 이고, $n(A \cup X) = 4$, $n((A - B) \cap X) = 2$ 일 때, 집합 X 의 개수는?

① 2 개

② 4 개

③ 8 개

④ 16 개

⑤ 32 개

해설

$n(A \cup X) = 4$ 에서 $n(A) = 4$ 이므로 $A \cup X = A$, 즉 $X \subset A$ 가 된다.

또, $n((A - B) \cap X) = n(\{1, 2\} \cap X) = 2$ 에서 $(A - B) \subset X$ 이다.
따라서 $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 1, 2를 반드시 포함하는 A 의 부분 집합의 개수와 같으므로
 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

13. 다음에서 조건 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, a, b, x, y 는 실수)

① $p : a^2 = ab, q : a = b$

② $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : 0 < x < 1, q : x < 2$

④ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p : xy > x + y > 4, q : x > 2$ 이고 $y > 2$

해설

① (반례) $a = 0$ 인 경우 필요조건만 성립

② (반례) $x = 3$ 인 경우 명제와 역 모두 성립하지 않는다.

③ (반례) 충분조건은 성립, 역에서는 $x = -1$ 인 경우가 반례이다.

⑤ (반례) $x = 10, y = 1.5$ 인 경우 성립하지 않는다.

14. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.

$$\therefore a \leq -1$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

15. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로
 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \end{aligned}$$

그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$

$$\therefore |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

따라서 $|a+b| \leq |a|+|b|$

여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
 즉, $ab \geq 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \geq ab, a = b$

② $|ab| \geq ab, |ab| = ab$

③ $|ab| \leq ab, |ab| = ab$

④ $|ab| = ab, a = 0$

⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \geq ab$ ($\because |ab|$ 는 항상 양수)

(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

16. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

17. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = 1-x$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$ 이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

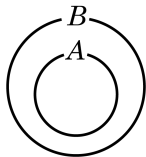
$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = 1-x = 10 \quad x = -9$$

18. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } a \text{의 배수}\}$ 의 관계가 다음의 벤 다이어그램과 같을 때, a 의 값으로 들어 갈 수 없는 것은?



① 1

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 12

해설

$A \subset B$ 이므로 a 는 18의 약수

$\therefore a = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

19. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$

㉡ $A \cup B = B$

㉢ $A^c \subset B^c$

㉤ $A \cap B = B$

㉥ $A \cup B^c = U$

㉦ $A - B = \emptyset$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

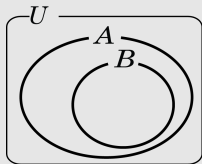
㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉤ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉥ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개



20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 갯수를 구하여라.

$$\begin{aligned} B &\subset A \\ 2 &\in B \\ n(B) &= 3 \end{aligned}$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

집합 B 는 원소 2를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3개인 집합 A 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합 B 를 구하면 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$ 이고, 총 6개이다.

21. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은?

① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

② $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

⑤ $p : |a| < |b|$, $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P) $\subset$ (진리집합 Q)

① $P : x = 1, y = 1$, $Q : x = 1, y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건

② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$, $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소

③ $P : a > 3$, $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건

④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$, $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건

⑤ $p \not\rightarrow q, q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2, b = -3$)

22. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n - 2 & (n \geq 100 \text{일때}) \\ f(f(n + 4)) & (n < 100 \text{일때}) \end{cases}$$

에서 $f(96)$ 의 값을 구하면?

① 78

② 80

③ 98

④ 99

⑤ 100

해설

$$f(96) = f(f(100)), f(100) = 98,$$

$$f(98) = f(f(102)), f(102) = 100$$

$$\therefore f(96) = 98$$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}$ 이고 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28 개

해설

$A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 집합 B 는 적어도 A 의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로

(집합 B 의 갯수)

$= (U \text{의 부분집합의 갯수}) -$

$(A \text{의 원소를 포함하지 않는 } U \text{의 부분집합의 갯수}) = 2^5 - 2^{5-3}$

$= 2^5 - 2^2$

$= 32 - 4 = 28(\text{개})$

24. x, y 가 실수일 때, $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y + 14$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 2(y-2)x + 3y^2 + 4y + 14 \\ &= (x+y-2)^2 - (y-2)^2 + 3y^2 + 4y + 14 \\ &= (x+y-2)^2 + 2y^2 + 8y + 10 \\ &= (x+y-2)^2 + 2(y+2)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

따라서 $x=6, y=-4$ 일 때, 최솟값은 2

해설

위의 방법은 완전제곱꼴로 묶을 수 있는 특수한 경우에 사용할 수 있는 좀 더 쉬운 풀이이고 일반적인 경우의 해법은 좀 더 복잡하다.

$x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y + 14 \geq k$ 라고 하면

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y + 14 - k \geq 0$$

이 모든 실수 x, y 에 대해 성립하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 판별식을 사용하면

$$x^2 + 2(y-2)x + 3y^2 + 4y + 14 - k \geq 0$$

$$D/4 = -2y^2 - 8y - 10 + k \leq 0$$

$2y^2 + 8y + 10 - k \geq 0$ 이고 모든 y 에 대해 성립하는 절대부등식
이므로

$$D/4 = 16 - 20 + 2k \leq 0$$

$$\therefore k \leq 2$$

따라서 준식의 최솟값은 k 의 최댓값인 2이다.

25. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \leq x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로

$$y = [x] - x = -3 - x$$

$-2 \leq x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로

$$y = [x] - x = -2 - x$$

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로

$$y = [x] - x = -1 - x$$

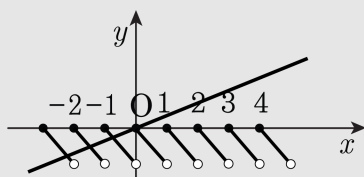
$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$y = [x] - x = -x$$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$y = [x] - x = 1 - x$$

따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \leq x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$

ii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$

iii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

iv) $0 \leq x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$

$$\therefore a = 4, b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$