1. 점 $(3, 4)$를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계 없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

① $(3, -4)$ ② $(-3, 4)$ ③ $(-3, -4)$
④ $(4, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

해설
x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

2. 직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 다음, 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y-5=0$　② $2x-4y-9=0$
③ $3x-2y-40=0$　④ $2x-y-21=0$
⑤ $6x-3y-29=0$

해설

직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(8-x)-3(-6-y)+6=0$
즉, $2x-3y-40=0$
이것을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(-y)-3(-x)-40=0$
$\therefore 3x-2y-40=0$

3. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A=\varnothing$ 이면 $n(A)=0$

② $B=\{a,\ b\}$ 이면 $n(B)=2$

③ $C=\{x \mid x$는 8의 약수$\}$ 이면 $n(C)=4$

④ $D=\{0\}$ 이면 $n(D)=0$

⑤ $E=\{y \mid y$는 10 이하의 짝수$\}$ 이면 $n(E)=5$

해설

④ $D=\{0\}$ 이면 $n(D)=1$

4. 다음 두 집합 사이의 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$ 를 나타냈을 경우 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ 인 개수를 구하여라.

㉠ $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d, e\}$

㉡ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$

㉢ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{x | x$는 6의 약수$\}$

㉣ $A = \{x \mid x$는 4 의 배수$\}, B = \{x \mid x$는 8 의 배수 $\}$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

㉠ $A \subset B$ ㉡$A \not\subset B$ ㉢ $A \subset B$ ㉣ $B \subset A$

5. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a+1\}$, $B=\{1,\ b,\ 7\}$ 에 대하여 $A\subset B$ 이고, $B\subset A$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$A=B$ 이므로 $b=2$, $a+1=7$, $a=6$

$\therefore\ a+b=8$

6. 전체 집합 $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 의 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $(A \cap B)^c = \{5, 6, 8, 9, 10\}$, $(A \cup B)^c = \{5, 8\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$

② $A - B = \{6\}$

③ $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

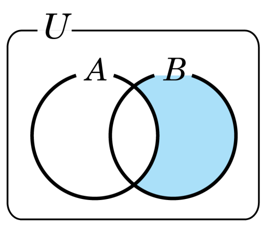
④ $B^c = \{5, 6, 8\}$

⑤ $B \cap A^c = \{8, 9, 10\}$

해설

⑤ $B \cap A^c = \{9, 10\}$ 이다.

7. 다음 벤 다이어그램의 빗금 친 부분을 표현한 것으로 옳은 것은?

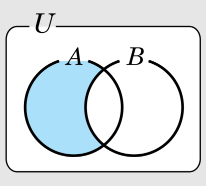


① $A-(A\cap B)$　② $A\cap B^c$　③ $A-B$

④ $(A\cup B)-B$　⑤ A^c-B^c

해설

①, ②, ③, ④



8. 함수 $y = | x - 3 | - 1$ 에 대하여 $0 \le x \le 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

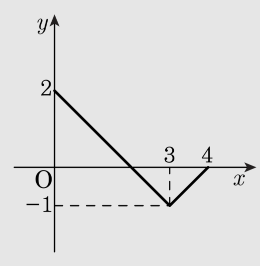
① 2, 1 ② 2, 0 ③ 2, -1
④ 1, -1 ⑤ 1, -2

해설

$0 \le x \le 4$ 에서
$y = | x - 3 | - 1$

$$= \begin{cases} x - 4 & (3 \le x \le 4) \\ -x + 2 & (0 \le x < 3) \end{cases}$$

따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로
$x = 0$ 일 때
최댓값은 2 이고
$x = 3$ 일 때
최솟값은 -1 이다.



9. 집합 $\{1,\ 2\} \subset X \subset \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$\{1,\ 2\} \subset X \subset \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 이므로
집합 X 는 $\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 의 부분집합 중
원소 1, 2 를 포함하는 집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{4-2} = 4$ (개)

10. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{x \mid x\text{는 }20\text{의 양의 약수}\}$에 대하여 $A \cup X = X$, $B \cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구한 것은?

① 2개　② 4개　③ 8개　④ 16개　⑤ 32개

해설

$B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이고, $A \cup X = X$, $B \cap X = X$이므로 X는 B의 부분집합이면서 1, 2, 4를 반드시 포함하는 집합이다.
$\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

11. x, y가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$　② $xy > 0$　③ $xy \geq 0$
④ $xy < 0$　⑤ $xy \leq 0$

해설

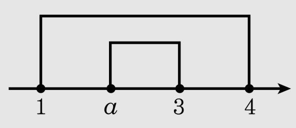
양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$
$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

12. $a \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \le x \le b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

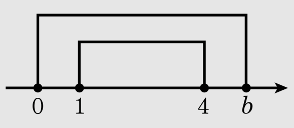
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $0 \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \le a \le 3$
따라서, a 의 최솟값은 1이다.



(ii) $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \le x \le b$ 이므로 다음 그림에서 $b \ge 4$



따라서, b 의 최솟값은 4이다.
(i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

13. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.

14. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$ ㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. ∴ 참
㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ ∴ 거짓
㉢ [반례] $x = 0,\ y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ ∴ 거짓

15. 두 집합 $X = \{x \mid x$는 100 이하의 자연수$\}$, $Y = \{y \mid y$는 자연수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f를 $f(x) = (x$의 양의 약수의 개수$)$로 정의할 때, $f(x) = ($홀수$)$를 만족시키는 모든 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 10 개

해설

100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가
홀수인 수는 완전제곱수밖에 없다.
즉, $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 10^2$ 이다.
따라서 x의 개수는 10 개

16. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가) ~ (다)에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

① 6, 3, 3　　② 6, 3, 1　　③ 6, 1, 3

④ 27, 3, 1　　⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \rightarrow X$ 라 하면

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 2개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)

(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0,\ f(1) = 1$의 1개

(iii) 상수함수 : $x \in X$일 때

$f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$의 3개

따라서, (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

17. 두 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$가 $f(h(x))=g(x)$를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$f(h(x))=\frac{h(x)-1}{h(x)+2}=\frac{x+1}{x-1}=g(x)$

$(x-1)\{h(x)-1\}=(x+1)\{h(x)+2\}$

$2h(x)=-3x-1, h(x)=\frac{-3x-1}{2}$

$\therefore\ h(2)=-\frac{7}{2}$

18. 집합 $A_a = \{x \mid x$는 a의 배수$\}$, 집합 $B_b = \{x \mid x$는 b의 약수$\}$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $A_2 \subset A_4$　　② $B_2 \subset B_4$　　③ $A_4 = B_4$

④ $n(B_{15}) = 5$　　⑤ $A_8 \subset A_4 \subset A_2$

해설

$A_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \cdots\}$

$A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16, \cdots\}$

$A_8 = \{8,\ 16,\ 24, \cdots\}$

$B_2 = \{1,\ 2\}$

$B_4 = \{1,\ 2,\ 4\}$

$B_{15} = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

① $A_4 \subset A_2$　③ $A_4 \neq B_4$　④ $n(B_{15}) = 4$

19. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 23$, $n(B) = 39$, $n(A \cup B) = 62$ 일 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$$A - B \boxed{} A$$

① $\in$ ② $\subset$ ③ $\supset$ ④ $\not\subset$ ⑤ $=$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
$62 = 23 + 39 - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cap B) = 0$ 이므로 $A \cap B = \phi$ 이다.
$A - B \boxed{} A$ 에서 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset$, $\supset$, $=$ 이다.

20. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.
수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.
수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$50 = 35 + 25 - x$
x 의 최솟값은 10 명이다.
최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.
그러므로 x 의 최댓값은 25 명이다.
최솟값과 최댓값의 합은 35 명이다.

21. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1,\ 2! = 2 \times 1,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x\text{는 자연수})\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

'p 이고 $\sim q$' $\Rightarrow$　$P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

22. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $\left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f \circ g)^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 $(f \circ g)(a) = 3$
$2a - 3 = 3$ 에서 $a = 3$
$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$
$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$
$h^{-1}(3) = b$ 놓으면 $h(b) = 3$
$2b + 1 = 3$
$\therefore b = 1$
$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = h^{-1}(3) = 1$

23. 집합 S 의 원소의 개수를 $n(S)$, 부분집합의 개수를 $|S|$라 하자. 집합 $A,\ B$에 대하여, $|A|+|B| = |A\cup B|$, $n(A) = 10$일 때, $n(A\cap B)$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$n(A) = 10$ 이므로 $|A| = 2^{10}$ 이다.
$n(B) = b$, $n(A\cup B) = c$라 하고, 문제의 뜻에 따르면 $2^{10}+2^b = 2^c$ 이다.
여기서 양변을 2^{10} 으로 나누면
$1 + 2^{b-10} = 2^{c-10}$ 이므로 좌변은 1보다 크고,
우변은 2의 거듭제곱이다.
$1 + 2^{b-10}$은 2의 배수이므로 $2^{b-10} = 1$
$\therefore\ b = 10$
그리고 $2^{c-10} = 2 \quad \therefore c = 11$

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 10 + 10 - 11 = 9 \end{aligned}$$

24. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(ⅰ) $i \ne j$ 일 때 $f(i) \ne f(j)$, (ⅱ) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (ⅰ), 항등함수 (ⅱ) 이다.

$$f(a) \ne f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$

$\rightarrow (a-1)(a-4) = 0$

$\therefore a = 1,\ 4$

$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$

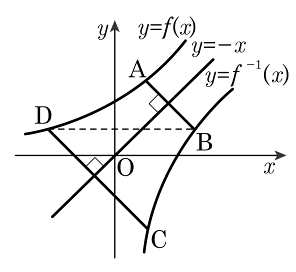
$\rightarrow (b-1)(b-4) = 0$

$\therefore b = 1,\ 4$

$\therefore a = 1,\ b = 4\ (\because\ 0 < a < b)$

$\therefore\ a + b = 5$

25. 다음 그림은 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프이다. 점 A 의 x 좌표가 a 일 때, □ABCD 의 넓이는? (단, BD 는 x 축에 평행하다.)



① $\frac{1}{2}\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}\left\{f(a)-a\right\}$

② $\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}\left\{f(a)-a\right\}$

③ $\frac{1}{2}af^{-1}(a)$

④ $\frac{1}{2}\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}^2$

⑤ $\left\{f(a)-a\right\}\left\{f^{-1}(a)-a\right\}$

해설

A$(a,\ f(a))$, B$(f(a),\ a)$, D$(b,\ a)$

그런데 $f(b)=a$ 이므로 $b=f^{-1}(a)$

$\therefore$ D$(f^{-1}(a),\ a)$

$\therefore$ C$(a,\ f^{-1}(a))$

□ABCD $=$ △ABD $+$ △CBD

△ABD $=\frac{1}{2}\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}\left\{f(a)-a\right\}$

△CBD $=\frac{1}{2}\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}\left\{a-f^{-1}(a)\right\}$

$\therefore$ □ABCD $=\frac{1}{2}\left\{f(a)-f^{-1}(a)\right\}^2$