1. 다음 중에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 1981 년도에 태어난 사람의 모임

② 유명한 사람의 모임

③ 10 보다 큰 수의 모임

④ 작은 자연수의 모임

⑤ 태국인들의 모임

해설

① '1981 년도' 라는 명확한 기준이 있으므로 집합이다.
② '유명한' 이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
③ '10 보다 큰' 이라는 명확한 기준이 있으므로 집합이다.
④ '작은' 이라는 단어가 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

2. 다음 중 무한집합을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid x$는 아시아에 속하는 국가$\}$

㉡ $B = \{x \mid x$는 100보다 큰 자연수$\}$

㉢ $C = \{x \mid x$는 20 이상의 자연수$\}$

㉣ $D = \{x \mid x$는 방위의 종류$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A = \{$대한민국, 일본, 중국, $\cdots$, 싱가포르$\}$: 유한집합

㉡ $B = \{100, 101, 102, \cdots\}$: 무한집합

㉢ $C = \{20, 21, 22, 23, 24, \cdots\}$: 무한집합

㉣ $D = \{$동, 서, 남, 북$\}$: 유한집합

3. 두 집합 $A = \{x, 7\}$, $B = \{3, x+4\}$에 대하여 $A = B$일 때, x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = B$이면 두 집합의 모든 원소가 같다.
따라서 $x = 3$이다.

4. $A = \{a,\ b,\ c\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 써라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 의 부분집합 : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 8 개 이다.

5. 세 집합 사이에 $\{1,\ 2,\ 3\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 만족하는 집합 A 가 될 수 있는 것은?

① $\{1,\ 2\}$ ② $\{1,\ 2,\ 3\}$ ③ $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4\}$ ⑤ $\{1,\ 3,\ 4\}$

해설

① $\{1,\ 2,\ 3\} \not\subset \{1,\ 2\}$

③ $\{1,\ 2,\ 3\} \not\subset \{1,\ 2,\ 4\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3\} \not\subset \{2,\ 3,\ 4\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3\} \not\subset \{1,\ 3,\ 4\}$

6. 전체집합 U 와 그 부분집합 A, B 가 있다. $A \cap B \neq \varnothing$ 일 때, 다음 중 $B - A$ 의 설명은?

① $x \in A$ 그리고 $x \notin B$

② $x \in B$ 그리고 $x \notin A$

③ $x \in A$ 그리고 $x \in B$

④ $x \in A$ 또는 $x \in B$

⑤ $x \in U$ 그리고 $x \notin A$

해설

$B - A = \{x | x \in B$ 그리고 $x \notin A\}$

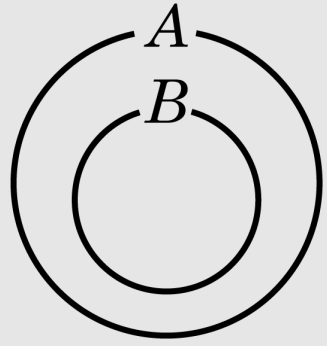
7. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = U$ ③ $B - A = \varnothing$

④ $A - B = \varnothing$ ⑤ $A \cap B^c = \varnothing$

해설

$B \subset A$ 이면, 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



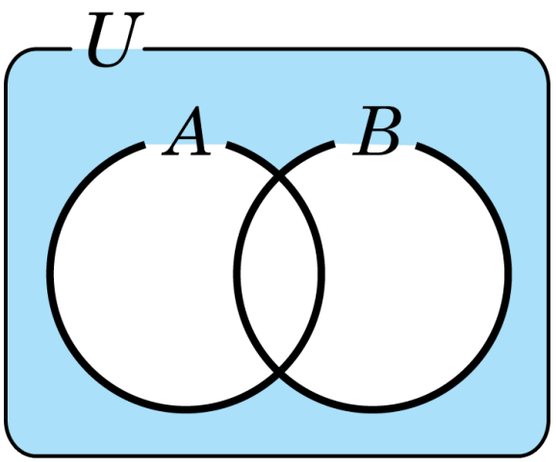
① $A \cap B = B$

② $A \cup B = A$

④ $A - B \neq \varnothing$

⑤ $A \cap B^c \neq \varnothing$

8. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 30$, $n(A) = 20$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 5 개

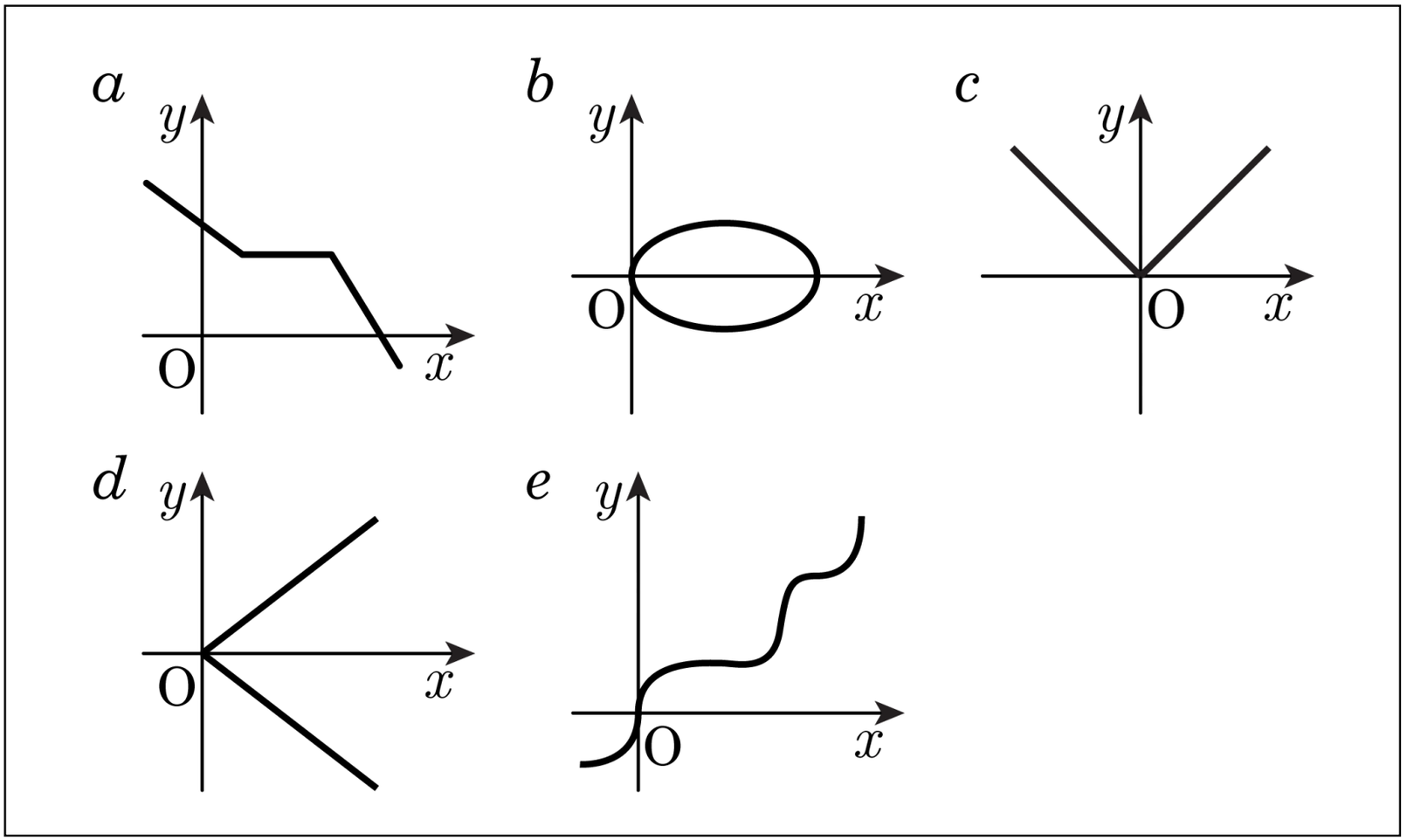
해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 15 - 10 \\ &= 25 \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$ 이다.

9. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e] 만이 함수이다.

10. 세 함수 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = |x + 5|$에 대하여 $(h \circ g \circ f)(1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -8$ 이므로

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(1) &= (h \circ (g \circ f))(1) \\ &= h((g \circ f)(1)) = h(-8) = |-8 + 5| \\ &= 3\end{aligned}$$

11. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

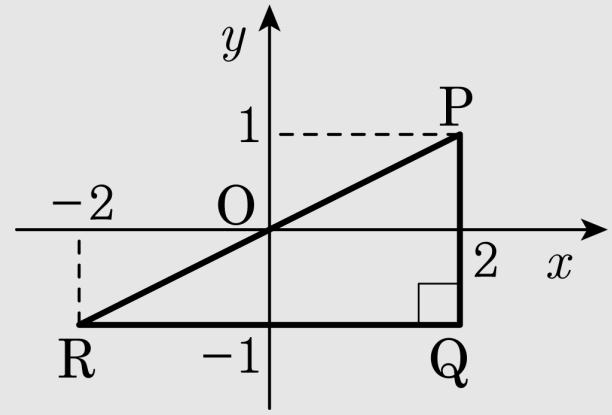
12. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q (2, −1)
또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 R 는 R (−2, −1)
따라서, 다음 그림에서 세 점
P (2, 1) , Q (2, −1) , R (−2, −1) 을
꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는



$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

13. 다음 중 집합 $A = \{1, 3, 5\}$ 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?

① $\{x \mid x$는 한 자리의 홀수$\}$

② $\{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$

③ $\{x \mid x$는 5 이하의 자연수 중 2로 나누었을 때 나머지가 1인 수 $\}$

④ $\{x \mid x$는 5보다 작은 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 1보다 큰 한 자리의 홀수$\}$

해설

① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
② $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
④ $\{1, 3\}$
⑤ $\{3, 5, 7, 9\}$

14. 집합 $A = \{\varnothing,\ x,\ y,\ \{x,\ y\}\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A 에서 $\{x,\ y\}$와 $\varnothing$ 은 하나의 원소이므로 $n(A) = 4$ 이다.

15. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{\varnothing\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이다.

② $\{x,\ y\}$ 는 $\{y\}$ 의 부분집합이 아니다.

③ $A \subset B,\ B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B,\ B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

⑤ $A \subset B,\ A \subset C$ 이면 $B \subset C$ 이다.

해설

① $\{\varnothing\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이 아니다. $\{3\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$ 과 $\{3\}$ 이다.

⑤ $A \subset B,\ A \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이고, B와 C의 포함 관계는 알 수 없다.

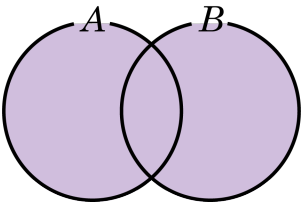
16. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 1은 반드시 원소로 하고 5는 원소로 하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$(개)

17. 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이상 20 미만의 소수$\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ?



① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

③ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17\}$

④ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

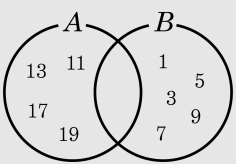
⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면

$A = \{11, 13, 17, 19\}$

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



색칠한 부분이 나타나는 원소는

$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.

18. 두 집합 $A = \{3,\ a-4,\ 9\}$, $B = \{7,\ b+3,\ 10\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7, 9\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

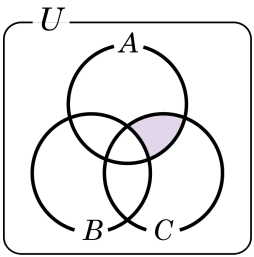
이므로

$7 \in A$ 이므로 $a-4=7 \quad \therefore a=11$

$9 \in B$ 이므로 $b+3=9 \quad \therefore b=6$

$\therefore a-b=11-6=5$

19. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 어두운 부분을 나타내는 집합은?



① $(A - B) \cup (A - C)$

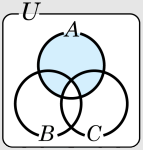
② $(A \cup C) \cap B^c$

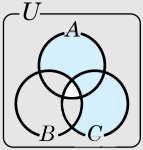
③ $A \cap (C - B)$

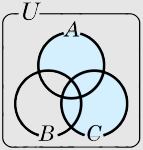
④ $C \cup (A - B)$

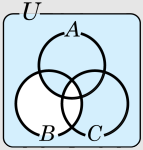
⑤ $B^c \cup (A - C)$

해설

① 

② 

④ 

⑤ 

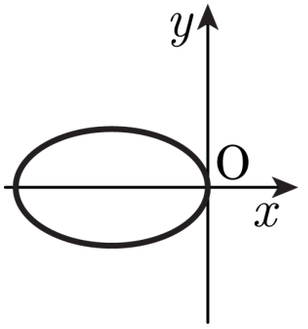
20. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

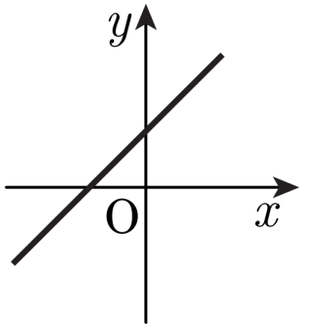
① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

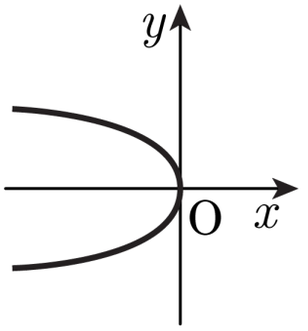
해설

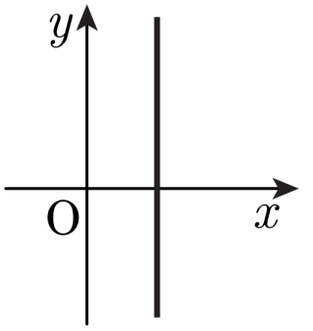
$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

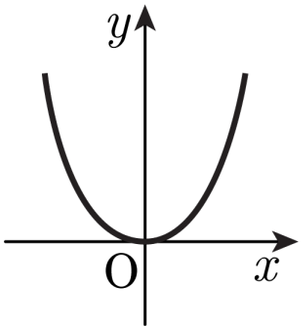
21. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. ⇒ ②

22. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

23. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

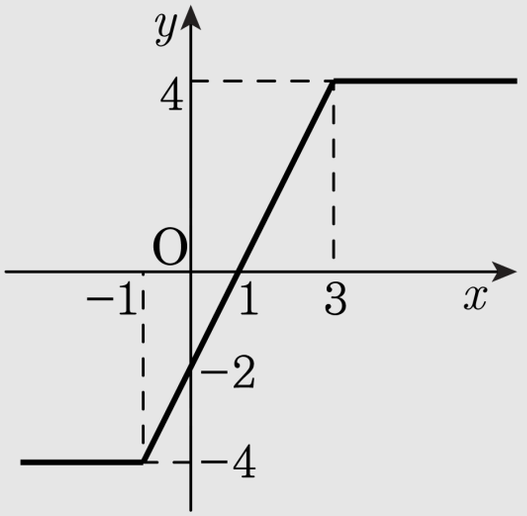
$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$



24. 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 점 $(1,\ 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -2)$ ② $(1,\ -3)$ ③ $(-1,\ 2)$

④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

i) 대칭인 점을 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 라 하면, $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 를 잇는 선분은 $y=x+1$ 에 수직이다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}-3}{\mathrm{X}-1}=-1 \Rightarrow \mathrm{X}+\mathrm{Y}-4=0$$

ii) $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 의 중점은 $y=x+1$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}+3}{2}=\frac{\mathrm{X}+1}{2}+1 \Rightarrow \mathrm{X}-\mathrm{Y}=0$$

i), ii) 를 연립하면, $\mathrm{X}=2,\ \mathrm{Y}=2$

$\therefore\ (2,\ 2)$

25. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 소수는 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.) (정답 2 개)

① $4 \in A$

② $\varnothing \subset A$

③ $\{3,\ 7\} \in A$

④ $\{x \mid x$는 8 이하의 2의 배수$\} \subset A$

⑤ $A \subset \{x \mid x$는 1 이상 10 이하의 소수$\}$

해설

① $4 \notin A$

③ $\{3,\ 7\} \subset A$

⑤ $A \subset A = \{x \mid x$는 1 이상 10 이하의 소수$\}$

26. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0, y = 2$ ② $x = 1, y = 2$

③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ ④ $x = 1, y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

27. 다음 명제 중 그 역이 참인 것은?

① $|a| = a$ 이면 $a < 0$ 이다.

② $xy \le 0$ 이면 $x \le 0$ 또는 $y \le 0$ 이다.

③ a, b 가 짝수이면 $a + b$ 는 짝수이다.

④ $x = y$ 이면 $ax = ay$ 이다.

⑤ $x = y = 0$ 이면 $x + y = 0$ 이고 $xy = 0$ 이다.

해설

각 명제의 역을 구하면
① $a < 0$ 이면 $|a| = a$ 이다. (거짓)
(반례) $a = -1 < 0$ 이면 $|-1| = 1 \neq -1$
② $x \le 0$ 또는 $y \le 0$ 이면 $xy \le 0$ 이다. (거짓)
(반례) $x = -1, y = -1$ 이면 $xy > 0$ 이다.
③ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 가 짝수이다. (거짓)
(반례) $a = 1, b = 3$ 일 때, $a+b$ 는 짝수이지만 a, b 는 홀수이다.
④ $ax = ay$ 이면 $x = y$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 0, x = 1, y = 2$ 일 때, $ax = ay$ 이지만 $x \neq y$ 이다.
⑤ $x + y = 0$ 이고 $xy = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다. (참)

28. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 <u>틀린</u> 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n =$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
$\therefore n^2$은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우 ② 홀수 ③ $2k + 1$
④ 거짓 ⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

29. 다음에서 조건 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : x = 0$이고 $y = 0$, $q : xy = 0$

② $p : x^2 = 9$, $q : x = 3$

③ $p : x, y$는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

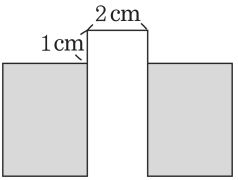
④ $p : x \neq 0$이고 $y \neq 0$, $q : xy \neq 0$

⑤ $p : x$는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

① $q \rightarrow p$: 거짓 $(x = 0,\ y = 1)$
② $p \rightarrow q$: 거짓 $(x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3)$
③ $q \rightarrow p$: 거짓 $(x = 1,\ y = 3$ 이면 $x + y = 4)$
④ 필요충분조건
⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 $(x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2)$

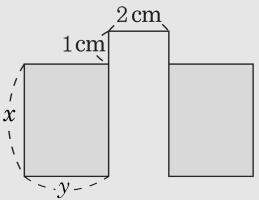
30. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,\mathrm{cm}^2$ ② $1200\,\mathrm{cm}^2$ ③ $1600\,\mathrm{cm}^2$

④ $2000\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $2400\,\mathrm{cm}^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 $y\,\mathrm{cm}$, 세로를 $x\,\mathrm{cm}$ 라고 하면

$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서

$4x + 2y = 196 x > 0,\ y > 0$ 이므로

(산술평균) ≥(기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

31. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) =$

$$\begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$$

에서 $f(98)$의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

32. 함수 $f_n(x)$ (n 은 자연수)는 보기의 두 조건을 만족한다.

보기

㉠ $f_1(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$

㉡ $f_n(x) = (f_{n-1} \circ f_1)(x)(n = 2, 3, 4, \cdots)$

이 때, $f_{2007}(2)$ 의 값은? (단, $x \neq -1$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{5}$

해설

$f_1(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f_2(2) = 2$, $f_3(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f_4(3) = 2 \cdots$

$\Rightarrow f_{2n}(2) = 2$, $f_{2n+1}(2) = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f_{2007}(2) = -\dfrac{1}{3}$

33. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$

$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)

$\therefore h = f^{-1} \circ g$

한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$x = \frac{1}{2}(y + 1)$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$

$h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$

$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$