1. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x+1) = f(x+2)$에 $x = -1$을 대입하면

$g(0) = f(1)$

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore\ g(0) = 0$

2. 실수를 원소로 갖는 집합 X가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$과 $g(x) = x^3 - 2x$가 같을 때, X의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$에서
$x^2 = x^3 - 2x,\ x^3 - x^2 - 2x = 0$
$x(x+1)(x-2) = 0,\ x = -1,\ 0,\ 2$
$\therefore\ \mathrm{X} = \{-1,\ 0,\ 2\}$
따라서 X의 공집합을 제외한
부분집합이 되므로 7개

3. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0,\ \ (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

4. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = 1 - x^2$ ㉡ $g(x) = 3x - 2$

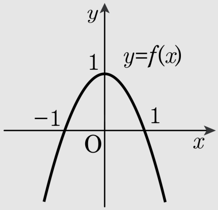
㉢ $h(x) = |x| + 2x + 1$

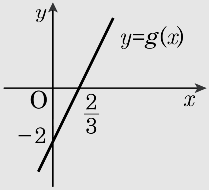
① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

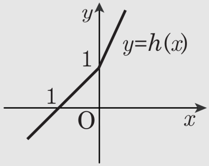
해설

㉢에서 $x \geq 0$ 일 때 $h(x) = 3x + 1$ 이고, $x < 0$ 일 때 $h(x) = x + 1$ 이므로

㉠, ㉡, ㉢의 세 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

㉠ 

㉡ 

㉢ 

따라서 보기 중 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢이다.

5. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

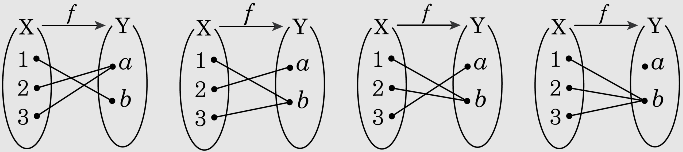
▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다

따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



6. $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$ 일 때

$\frac{2x}{-x+2} = 2$ 에서 $2x = 2(-x+2)$, $2x = -2x + 4$

$\therefore\ x = 1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f\left(\frac{2}{-1+2}\right) = 1 - 3$

$\therefore\ f(2) = -2$

7. 함수 $f(x) = x + 1$라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1)+1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1)+2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1)+3 = x+4 \\ &\cdots \\ f^n(x) &= x+n \end{aligned}$$

$\therefore\ f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$

8. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+2)=6x-3$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2)=6x-3$에서 $3x+2=t$라 하면

$f(t)=2t-7$이므로 $f(x)=2x-7$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

$\therefore g(3)=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

9. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$	㉡ $f(x) = -x - 1$
㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$

㉡ $(f \circ f)(x) = x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

10. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 10개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,

$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,

$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,

$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \le x < 4$ 일 때,

$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

11. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1)+f(2)g(2)+f(3)g(3)+\cdots+f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{51}{49}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{(x+1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ 이므로

(주어진 식) $=$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$

12. 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}$를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 정수)이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}=k$ 라 하자

$\Rightarrow x+y=5k,\ \ y+z=6k,\ \ z+x=7k$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k,\ y=2k,\ z=4k$

$$(\text{준식})=\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$$

$$=\frac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\frac{3}{7}$$

$\therefore m=7,\ n=3$

$\therefore m+n=10$

13. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2,\ y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

14. 실수 x를 입력하면 실수 $\dfrac{x-1}{6x-1}$이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\dfrac{2}{3}$를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력되어 나온 결과를 다시 입력하는 과정을 1004번 반복했을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 구하면? (단, $x \neq \dfrac{1}{6}$)

① $-\dfrac{1}{9}$ ② $-\dfrac{1}{11}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ 9 ⑤ 11

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\dfrac{x-1}{6x-1} - 1}{6 \cdot \dfrac{x-1}{6x-1} - 1}$$

$$= \frac{x-1-6x+1}{6x-6-6x+1}$$

$$= \frac{-5x}{-5} = x$$

즉, $f^2(x) = f^4(x) = f^6(x) = \cdots = f^{2n}(x) = x$ 이므로

$f^{1004}(x) = f^{2\times 502}(x) = \cdots = x$

$\therefore\ f^{1004}\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

15. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{6}{a+b}+b$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3-\sqrt{3}$$

$$a=1,\quad b=2-\sqrt{3}\quad (\because\ 1<\sqrt{3}<2)$$

$$\therefore\ \frac{6}{a+b}+b = \frac{6}{3-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3} = 5$$

16. $0 \le a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1+\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1-\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4>0$ 이고 $0<a<2$ 이므로

$a+2>0,\ a-2<0$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} = \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}$$

$\therefore\ a=0$ 일 때 최댓값 2

17. 함수 $y = -\sqrt{a-x}+b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \le 4 \}$이고, 그래프가 점 $(-5,\ 2)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{ y \mid y \ge 1 \}$ ② $\{ y \mid y \le 3 \}$ ③ $\{ y \mid y \ge 3 \}$
④ $\{ y \mid y \le 5 \}$ ⑤ $\{ y \mid y \ge 5 \}$

해설

$a - x \ge 0$ 에서 $x \le a$
$\therefore\ a = 4$
$y = -\sqrt{4-x}+b$ 의 그래프가 점 $(-5,\ 2)$ 를 지나므로 $2 = -\sqrt{4-(-5)}+b$
$\therefore\ b = 5$
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{ y \mid y \le 5 \}$

18. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점$(1,\ 3)$을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼
평행 이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의
그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$
이 때, 이 그래프가 점$(1,\ 3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-3a},\ -3a = 9$
$\therefore\ a = -3$

19. $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{2x}$와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

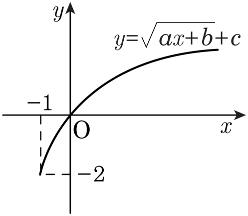
해설

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{-2x}$와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2,\ 1)$이고 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4,$분면을 지난다.

20. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로

$y = \sqrt{ax+b}+c$

$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{a(x+1)}-2$

이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$

$\therefore \ \sqrt{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

$y = \sqrt{4x+4}-2$

$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

21. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

22. 두 집합 $A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x+1}\}$, $B=\{(x,y)\mid y=x+k\}$에서 $n(A\cap B)=2$일 때, 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k<1$ ② $k>\dfrac{5}{4}$ ③ $1<k<5$

④ $1\le k<\dfrac{5}{4}$ ⑤ $1\le k\le\dfrac{5}{4}$

해설

$n(A\bigcap B)=2$는 $y=\sqrt{x+1}$과

$y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 것을 의미한다.

(i) 두 그래프가 접할 때,

$$\sqrt{x+1}=x+k$$

$$x+1=x^2+2kx+k^2(x\ge-1)$$

$$x^2+(2k-1)x+k^2-1=0\ (x\ge-1)$$

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$$

$$-4k+5=0$$

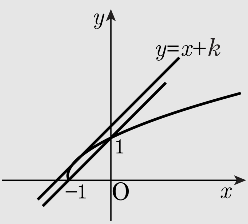
$$\therefore k=\frac{5}{4}$$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때

$$0=-1+k\quad\therefore k=1$$

(i), (ii)에 의하여

$$\therefore 1\le k<\frac{5}{4}$$



23. 함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$

② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$

④ $y = x^2 - 3 \ (x \leq 1)$

⑤ $y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$

해설

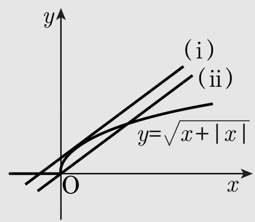
$y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역과 치역은
각각 $x \geq 3, \ y \geq 0$ 이고 양변을 제곱하면
$y^2 = x - 3, \ x = y^2 + 3$
$\therefore \ y = x^2 + 3 \ (x \geq 0, \ y \geq 3)$

24. 함수 $y = \sqrt{x + |x|}$와 직선 $y = x + k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 0$　　② $-1 < k \le 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{2}$

④ $0 \le k < \frac{1}{2}$　　⑤ $0 < k \le \frac{1}{2}$

해설



$x \ge 0$일 때 $y = \sqrt{2x}$이고 $x < 0$일 때 $y = 0$이므로 $y = \sqrt{x + |x|}$의 그래프는 그림과 같고 직선 $y = x + k$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 (i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.

① 곡선 $y = \sqrt{2x}$와 직선 $y = x + k$가 접할 때

$\sqrt{2x} = x + k$에서 $2x = (x + k)^2$

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0, \quad -2k + 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

② 직선 $y = x + k$가 원점을 지날 때 $k = 0$

①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$

25. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0)+f(2)$의 값은? (단, $f(1)=1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 는 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 항상 성립하므로

$x=1,\ y=0$ 일 때 $f(1)\cdot f(0)=f(1)+f(1)$

$\therefore\ f(0)=2\ (\because\ f(1)=1)$

$x=1,\ y=1$ 일 때 $f(1)\cdot f(1)=f(2)+f(0)$ 에서 $1=f(2)+2$

$\therefore\ f(2)=-1$

$\therefore\ 2f(0)+f(2)=4-1=3$

26. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 이므로 $(g \circ f)(3x) = x$

$3x = t$ 로 치환하면 $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$

$3x + 2 = 2$ 일 때 $x = 0$

$\therefore\ g(2) = 0$

27. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \dfrac{100x + 200}{f(x)}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$

$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2(\because\ k > 0)$

$\therefore\ (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2)$

$$= \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$

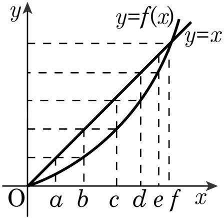
28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ (x\geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x\geq 0$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2=x$ 에서 $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

29. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



① $2a$　② $b+e$　③ $c+d$

④ $2c$　⑤ $b+c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

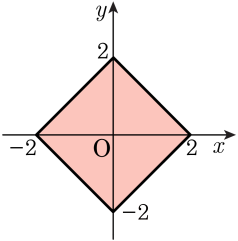
30. $|x|+|y|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8$



31. A $= \{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다. $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$3 \times 3 = 9$

32. 서로소인 두 자연수 $m,\ n(m>n)$에 대하여 유리수 $\dfrac{m}{n}$을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\dfrac{151}{87}$을 나타낼 때, $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은?

$$\frac{m}{n}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$$\frac{151}{87}=1+\frac{64}{87}=1+\cfrac{1}{\cfrac{87}{64}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{23}{64}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{64}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{18}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{23}{18}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{18}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{5}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$\therefore a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=3$ 이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+1+3=7$

33. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

(주어진 식)

$$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$$

$$=\frac{(b+c)^3+b^2(-b)+c^2(-c)}{-(b+c)bc}$$

$$=\frac{(b+c)^3-(b^3+c^3)}{-(b+c)bc}$$

$$=\frac{3bc(b+c)}{-(b+c)bc}=-3$$

34. 어느 해 A대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 $8 : 5$, 합격자의 남녀의 비가 $7 : 4$, 불합격자의 남녀의 비가 $3 : 2$라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

① 1200 ② 1250 ③ 1300 ④ 1350 ⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t,\ 5k = 4s + 2t$이고,

두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore\ s = 50$

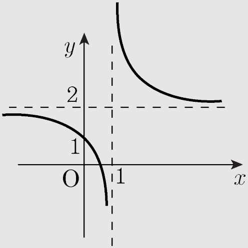
따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300$(명)

35. 분수함수 $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
④ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

해설

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$



$y = 1$ 일 때, $1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

36. $2 \le x \le 4$일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

$y = \dfrac{3x-4}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} + 3$

$x = 2$일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$\therefore \quad Mm = 2 \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

37. 두 실수 x, y 가 $x+y=-1$, $xy=2$을 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$x+y=-1,\ xy=2 \Rightarrow x<0,\ y<0$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (\because\ x<0,\ y<0)$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

38. m이 유리수일 때, $\dfrac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

39. 분수식 $\dfrac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x값들의 총합은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

$8+2x-x^2 \geq 0$ 에서 $x^2-2x-8 \leq 0$

$(x+2)(x-4) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 4$

(i) 분모 $=(x-1)(x-2) \neq 0$ 에서 $x \neq 1,\ 2$

(ii) 분자 $= x+3=0$ 에서 $x=-3$

$\therefore$ 정수 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$ 이고

(합)$=-3-2-1+0+3+4=1$

40. $a = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 일 때, a^2+b^2 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{5}$

해설

$a = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 이므로

$a^3 = 7-5\sqrt{2}$, $b^3 = 7+5\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ a^3+b^3 = 14$

그리고 $ab = \sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})} = -1$ 이므로

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ 에서 $a+b=t$ 라 하면

$t^3 = 14-3t$, $t^3+3t-14=0$

$(t-2)(t^2+2t+7)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t^2+2t+7 \neq 0)$

$\therefore\ a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 2^2+2 = 6$