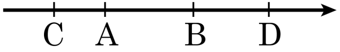
1. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은

i) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

ii) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

외분점을 P 라고 하면

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ 이므로

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

2. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

3. $11 \cdot 13^3 + 33 \cdot 13^2 + 33 \cdot 13 + 11$의 인수가 아닌 것을 고르면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ 14 ⑤ 22

해설

$11 = a$, $13 = b$ 라 하면

$a \cdot b^3 + 3ab^2 + 3ab + a$

$= a(b^3 + 3b^2 + 3b + 1)$

$= a(b+1)^3 = 11 \cdot 14^3$

$= 11 \times 2^3 \times 7^3$

4. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2+4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1+2i)(x+1+2i)$

③ $x^2+4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $2x^2+4x-5=\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

③ $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

④ $2x^2+4x-5$

$=2\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1$

$=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

5. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m-1)x^2+2(m-1)x-5<0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 m 의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

(i) $m=1$ 일 때, $-5<0$ 이므로
부등식은 항상 성립한다.
(ii) $m\neq 1$ 일 때
이차부등식이 항상 성립하려면
이차항의 계수가 음수이고 $D<0$ 이어야 한다.
$m-1<0$ 에서 $m<1$

$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+5(m-1)<0$ 에서

$(m-1)(m+4)<0$

$\therefore\ -4<m<1$

(i), (ii) 에서 $-4<m\leq 1$
따라서 정수 m 은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$ 의
5 개이다.

6. 점 $(5,\ 3)$ 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x,\ 12x - 5y - 19 = 0$

② $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

③ $y = 1,\ 12x - 5y + 5 = 0$

④ $y = 1,\ 4x - 5y - 8 = 0$

⑤ $y = -1,\ 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 $y - 1 = m(x - 2)$ $\cdots$ ㉠

점 $(5,\ 3)$ 과 직선 ㉠사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|\, m(5-2) - 3 + 1 \,|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$(3m-2)^2 = 4(m^2+1)$

$5m^2 - 12m = 0$

$\therefore\ m = 0,\ \dfrac{12}{5}$

㉠에 대입하면 $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

7. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore\ a+b+c+d=-2$

8. $y=ax^2+bx+c$ 에서 $a>0$, $b^2-4ac>0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.
② 최솟값이 양수이다.
③ 최솟값이 음수이다.
④ 최댓값이 양수이다.
⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x+5y < 5 \\ -2 < 2x+7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x+5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times(-2)+$ ㉡을 하면
$-10 < -2x-10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x+y$의 최댓값은$-3+1=-2$이고,
최솟값은$-11+3=-8$이다.
$\therefore M=-2,\ m=-8 \quad \therefore\ M+2m=-18$

10. 연립부등식 $A : 5(x+2) \leq 26+x$, $B : 1-x < 3(2x+1)$, $C : 3x-5 < -(x+1)$ 에 대하여 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{2}{7} < x < 1$

해설

$A : 5(x+2) \leq 26+x \;\Rightarrow\; x \leq 4$

$B : 1-x < 3(2x+1) \;\Rightarrow\; x > -\frac{2}{7}$

$C : 3x-5 < -(x+1) \;\Rightarrow\; x < 1$

$\therefore\; -\frac{2}{7} < x < 1$

11. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0 \le a \le 2$ ③ $a<0,\ a>2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

12. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$ ② $2^{22}+2^{11}-2$ ③ $2^{21}-2^{10}+1$

④ $2^{21}+2^{10}-1$ ⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면

$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$ ㉠

$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$

$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$

13. $x^2 + y^2 = x^3$ 을 만족하는 자연수 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 무수히 많다. ⑤ 답 없음.

해설

$x^2 + y^2 = x^3$, $y^2 = x^2(x-1)$, $x - 1 = k^2$ 을 만족하는 정수 k 를 택하면, $y = xk$ 가 된다.
따라서 $x^2 + y^2 = x^3$ 을 만족하는 자연수 쌍 $(x,\ y)$ 는 무수히 많다.

14. 제품 A, B, C 를 만드는 데 필요한 부품 P, Q, R 의 개수는 다음 표와 같다.

	P	Q	R
A	2		4
B	2	1	2
C		1	1

어느 공장에서 부품 P, Q, R을 각각 1000 씩 구매하여, 부품 P 는 440 개, 부품 Q 는 670 개를 남기고, 부품 R은 230 개 이상을 남겼을 때, 만들 수 있는 제품 B 의 최소 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 227 개

해설

제품 A, B, C 의 개수를 각각 x개, y개, z개 로 놓고 사용한 부품의 개수를 구하면

부품 P 의 개수는

$2x+2y=1000-440=560$, $x+y=280\cdots$ ㉠

부품 Q 의 개수는

$y+z=1000-670=330$, $y+z=330\cdots$ ㉡

부품 R 의 개수는

$4x+2y+z<1000-230=770$,

$4x+2y+z<770\cdots$ ㉢

이므로 ㉠, ㉡ 에서 x, z 를 y 에 관해 나타내면 $x=280-y$, $z=330-y$

이것을 ㉢에 대입하면

$4(280-y)+2y+(330-y)<770$

$1120-4y+2y+330-y<770$

$-3y<-680$ $\quad\therefore\ y>226.\times\times\times$

만들 수 있는 제품 B 의 최소 개수는 227 개이다.

15. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \iff b^2=a^2+1\cdots①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \iff (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots②$$

①, ② 에서 $b^2\ge 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0,0)$과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots①$

중심 $C_2\ (0,2)$와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}},\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2\ \ \cdots\cdots㉡$

㉠ $\times 4-$ ㉡ 에서

$3b^2+4b-4=0,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\ge 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$