1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0$, $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

5. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2,\ y = -3$일 때, $a + b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x = 2,\ y = -3$을
두 방정식
$2x + ay = 10,\ x - y = b$에 대입하면
모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$
$\therefore\ a = -2$
$2 - (-3) = b$
$\therefore\ b = 5$
$\therefore\ a + b = 3$

6. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

7. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

8. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

9. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

11. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$　② $a<-1$　③ $a>\frac{3}{2}$　④ $a<\frac{3}{2}$　⑤ $a>-2$

해설

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

13. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

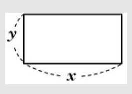
14. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ⋯⋯ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

15. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x + y = 200$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \dfrac{400}{3}\text{m/분}$

$\Rightarrow \dfrac{400\text{m}}{3}/\text{분} = \dfrac{0.4\text{ km}}{3} \times 60/\text{시간} = 8\text{ km/h}$

16. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

17. 0이 아닌 실수 $x,\ y$ 가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : −1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0,\ y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm 1$

18. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

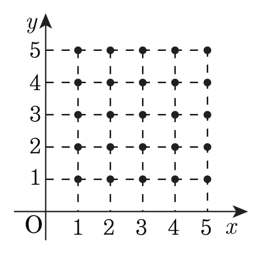
해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

19. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개　② 1 개　③ 2 개

④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$

$=(x-2)(y+1)$ 이므로

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

ⅰ) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ⅱ) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

ⅲ) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

ⅳ) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,

$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

20. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$ 을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 3 개　　② 4 개　　③ 5 개　　④ 6 개　　⑤ 7 개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$

$\therefore\ (x, y, z)=$

$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$,

$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$,

$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$

21. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때,$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha) = 0$,
$1-\alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n+1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

22. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20％적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원　② 30000 원　③ 81000 원

④ 162000 원　⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

23. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면
$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ \cdots(\text{i})$
$b\alpha^2+c\alpha+a=0 \ \cdots(\text{ii})$
$c\alpha^2+a\alpha+b=0 \ \cdots(\text{iii})$
(i)+ (ii)+ (iii) 하면
$(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$
α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$
$\therefore\ a+b+c=0$

24. 연립방정식 $\begin{cases} ab+bc=65 \\ ac+bc=17 \end{cases}$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수를 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$ac+bc=17$ 에서 $c(a+b)=17$
그런데 $a,\ b$는 양의 정수이므로 $a+b \geq 2$
$\therefore\ \ c=1,\ a+b=17$
위의 식들을 $ab+bc=65$ 에 대입하면
$a^2-16a+48=0$
$\therefore\ \ a=4$ 또는 $a=12$
따라서, $a=4$ 일 때 $b=13,\ c=1$
$a=12$ 일 때 $b=5,\ c=1$

25. 서로 다른 세 복소수 $a,\ b,\ c$ 가 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 을 만족할 때, $\frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a+b+c=0,\ a+b=-c \quad \cdots$ ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ②

②에서 $ab=-c(a+b)$ $\leftarrow$ ①대입

$\therefore\ ab=c^2 \leftarrow$ ㉠

마찬가지로

$bc=a^2-$㉡, $ca=b^2-$㉢

㉢ ÷ ㉡ : $\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^2, \left(\frac{b}{a}\right)^3=1$

㉡ ÷ ㉠ : $\frac{c}{a}=\left(\frac{a}{c}\right)^2, \left(\frac{a}{c}\right)^3=1$

즉, $\frac{b}{a}, \frac{a}{c}$ 는 $t^3=1, (t-1)(t^2+t+1)=0$ 의 근이고 a, b, c 가 서로 다른 수이므로

$\frac{b}{a}, \frac{a}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 근이다.

또한 ㉡에서 $bc=a^2$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$\therefore\ \frac{b}{a}$ 와 $\frac{\overline{a}}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 서로 다른 두 근

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}=-1$ (두 근의 합)