

1. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

①

11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$ab + bc + ca = -1$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11$$

2. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$ 을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}, 1$ 을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

㉠ $\frac{2}{3}$

㉡ $\frac{1}{3}$

㉢ 1

㉣ 2

㉤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.

갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$ 라 하면

$$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2,$$

$$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5 \text{ 이므로}$$

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.

같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \text{ 으로}$$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 실수배임을 알 수 있다.

b 값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b 값이 일치하므로

$a = 3, c = -5$ 임을 알 수 있고 b 는 -2 임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$ 이다.

3. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$

$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하여라.

① $m < -2, m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2, m > 2$

④ $m < 2, m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5, m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을 항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식

$$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$$

$$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$$

$$(3m-2)(m+2) > 0$$

$$\therefore m < -2, m > \frac{2}{3}$$

4. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 한 점 $(-5, 3)$ 을 지나고, $x = m$ 일 때 최솟값 $3m$ 을 갖는다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = -11$

▷ 정답 : $m = -2$

해설

$y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(m, 3m)$ 이므로
 $y = (x - m)^2 + 3m$ 에 $(-5, 3)$ 을 대입한다.

$$3 = (-5 - m)^2 + 3m$$

$$m^2 + 10m + 25 + 3m = 3$$

$$m^2 + 13m + 22 = 0$$

$$(m + 11)(m + 2) = 0$$

따라서 $m = -11$ 또는 $m = -2$ 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

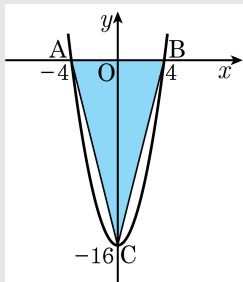
▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점 A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.

꼭짓점의 좌표는 $(0, -16)$ 이다.



구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

6. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^4 - a^2}{a^6 - 1}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$a(a+1) = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 = -a + 1$$

$$a^4 = (-a + 1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

$$= (-a + 1) - 2a + 1 = -3a + 2$$

$$a^6 = a^4 \times a^2 = (-3a + 2)(-a + 1)$$

$$= 3a^2 - 5a + 2 = 3(-a + 1) - 5a + 2$$

$$= -8a + 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^4 - a^2}{a^6 - 1} &= \frac{-3a + 2 - (-a + 1)}{-8a + 5 - 1} \\ &= \frac{-2a + 1}{-8a + 4} = \frac{-2a + 1}{4(-2a + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

7. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

8. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$

② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$

③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$

④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x \\ &= (x^2 - 3)(x^2 + 1) + 2x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

9. α, β 가 x 에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q) - k = 0$ 의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x - \alpha)(x - \beta) + k = 0$$

① α, β

② $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

③ p, q

④ $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$

⑤ $-p, -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q) - k = 0$ 을 정리하면

$$x^2 + (p+q)x + (pq-k) = 0$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -(p+q), \alpha\beta = pq - k \cdots \textcircled{㉑}$$

방정식 $(x-\alpha)(x-\beta) + k = 0$ 을 정리하면

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta + k = 0$$

$$\therefore x^2 + (p+q)x + pq = 0 \quad (\because \textcircled{㉑} \text{ 대입})$$

$$\therefore (x+p)(x+q) = 0$$

따라서 구하는 두 근은 $x = -p, -q$

10. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

① -1

② 2

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가

u, v 에 대한 항등식이므로

$u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.

$$\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$f(1) = 1 \text{ 이므로 } f(0) = 2$$

또, $u = v = 1$ 일 때는

$$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(3) &= f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1) \\ &= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$