

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \text{가 유리수}) \\ 2x & (x \text{가 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때,}$$

$f(x) - f(x-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(i) x 가 유리수일 때, $x-1$ 도 유리수이므로

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 2x - 1 - \{2(x-1) - 1\} \\ &= 2x - 1 - (2x - 3) = 2 \end{aligned}$$

(ii) x 가 무리수일 때, $x-1$ 도 무리수이므로

$$f(x) - f(x-1) = 2x - 2(x-1) = 2$$

따라서 (i), (ii)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) - f(x-1) = 2$$

2. 정의역이 $\{0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$, $g(0) = 1$ 에서 $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$, $g(1) = 3$ 에서 $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

3. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로

$$-a + b = -5, \quad 4a + b = 10$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$$\therefore 2a + b = 4$$

4. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.



답 :

개

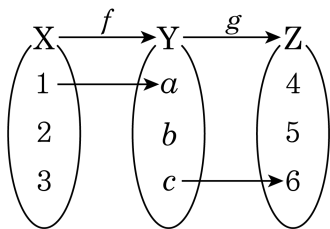


정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

6. 세 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 $g : Y \rightarrow Z$ 가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ b, c 모두 가능하다.

⑤ a, b, c 모두 가능하다.

해설

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 4 \cdots \textcircled{7}$$

함수 f 와 g 는 일대일 대응이므로 $g(f(2)) = 4$ 에서 $f(2) = a$ 또는 b

i) $f(2) = a$ 인 경우

$f(1) = a$ 로 정의된 조건과 모순

ii) $f(2) = b$ 인 경우

$f(1) = a, f(2) = b$ 로 성립

$$\therefore f(2) = b, f(3) = c$$

7. 두 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2}$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 을 만족하는 $k\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $3x-2$

② $6x-5$

③ $2x-3$

④ $x+1$

⑤ $4x+1$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x) \Rightarrow k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x+2}{2}, x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = 2x-2 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow k(x) = g(f^{-1}(x)) = 3(2x-2) + 1 = 6x-5$$

$$\therefore k\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6\left(\frac{x+1}{2}\right) - 5 = 3x-2$$

8. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x + 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

함수 $y = f(x)$ 의 역함수가 존재하면
일대일대응이다.

즉, 공역은 치역과 같으므로 치역을 구하면

$f(0) = 1, f(2) = 3$ 에서

$Y\{y \mid a \leq y \leq b\} = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$

$\therefore a = 1, b = 3$

$\therefore a + b = 4$

9. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$$

$$f^{-1}(8) = a \text{라 놓으면 } f(a) = 2a + 2 = 8$$

$$\therefore a = f^{-1}(8) = 3$$

10. 등식 $\frac{255}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

의 합은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$$

$$\therefore a + b + c + d + e = 15$$

11. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \cdot f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = x$$

$$\therefore g(1) \text{ 을 구하려면, } \frac{x+2}{2x-1} = 1 \text{ 이 되어야 한다.}$$

$$\Rightarrow x = 3 \quad \therefore g(1) = 3$$

12. 무리식 $\sqrt{2x+5} + \sqrt{15-3x}$ 가 실수값을 갖도록 하는 정수 x 의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

$$2x + 5 \geq 0, 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$$

$$15 - 3x \geq 0, 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$$

$$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$$

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 총 8개

13. 다음 식이 성립하는 실수 x 의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ 가 성립되지 않는 범위는
 $x+1 < 0$ 이고 $x-2 < 0$

$$\therefore x < -1$$

따라서 $x < -1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x < -1\}$ 의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$ 이고 실수 x 의 최솟값은 $\therefore -1$

14. $6 - \sqrt{3}$ 의 정수 부분을 x , 소수부분을 y 라 할 때 $\frac{1}{x} \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right)$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$6 - \sqrt{3} = 4 + (2 - \sqrt{3}) \quad (\because 0 < 2 - \sqrt{3} < 1)$$

$$\therefore x = 4, y = 2 - \sqrt{3}, \frac{1}{y} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore y + \frac{1}{y} = 4,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y + \frac{1}{y} \right)^3 - 3 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 52$$

$$\therefore \frac{1}{x} \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right) = \frac{1}{4} \cdot 52 = 13$$

15. $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답 :

▶ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$a + b = \sqrt{6}, ab = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

16. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab > 0$ 이면 제 3사분면

② $ab < 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b > 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

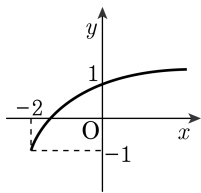
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b < 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b > 0)$ 이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉢ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉤ $a > 0, b < 0$ 이면 제 2사분면에 그래프가 그려진다.

㉥ $a < 0, b < 0$ 이면 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

17. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



- ① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
 ③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2}, 0)$
 ⑤ $(-\sqrt{3}, 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는

함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로

c 만큼 평행 이동시킨 것이므로

$$b = 2, c = -1$$

$$\therefore y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$$

한편, 이 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a\sqrt{0+2} - 1$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$ 의 그래프와

x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

18. $-5 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

$$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = -5 \text{ 일 때, 최댓값 } m = 2\sqrt{4 - (-5)} - 7 = -1$$

$$x = 3 \text{ 일 때, 최솟값 } n = 2\sqrt{4 - 3} - 7 = -5$$

$$\therefore m + n = -1 + (-5) = -6$$

19. x 에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m 의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ $\frac{3}{4}$

⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는

두 그래프 $y = \sqrt{2x}$ 와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.

이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이

서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,

m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.

$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면

$$2x = m^2(x+1)^2$$

$$m^2x^2 + 2(m^2 - 1)x + m^2 = 0$$

이 방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m^2 - 1)^2 - m^4 = 0$$

$$-2m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$$

따라서, m 의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$$

20. 무리함수 $y = \sqrt{x-a} + 1$ 에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(3) = 2$$

$$\therefore 2 = \sqrt{3-a} + 1$$

$$\therefore a = 2$$

21. $y = \sqrt{1 - (x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{2}$

③ π

④ 2π

⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1 - (x+1)^2}$ 에서

$$1 - (x+1)^2 \geq 0, x^2 + 2x \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$

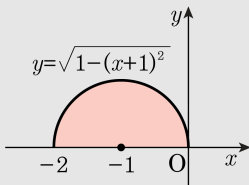
$y = \sqrt{1 - (x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$



22. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

$$(i) f(2x) = f(x) \quad (x = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ii) f(2x + 1) = 2^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$1280 = 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,}$$

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5)$$

$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,}$$

$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

23. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

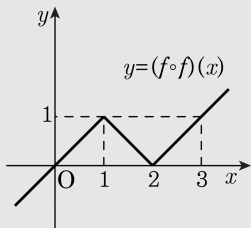
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로 $ab = -2$



24. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x - 9 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$

의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$2x - 9 = x \text{ 에서 } x = 9$$

$$\frac{2}{3}x - 9 = x \text{ 에서 } x = -27$$

따라서, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은

$$9 + (-27) = -18$$

25. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

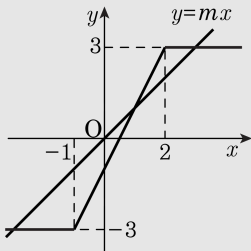
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



26. $A = \{-1, 0, 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다.
 $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

$$3 \times 3 = 9$$

27. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 을 전개하면

$$xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 27 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

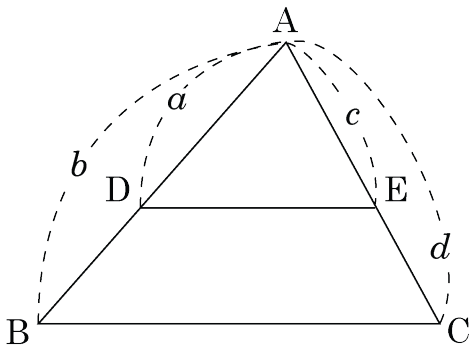
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 3(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 9(x + y + z) = 27$$

$$\therefore x + y + z = 3$$

28. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b, c \neq d$)



① $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{d-c}$

② $ac - bd = 0$

③ $a(d-c) = c(b-a)$

④ $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

⑤ $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c}$

해설

$a : b = c : d$ 이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

29. 두 지점 A, B를 왕복하는데 A에서 B까지 갈 때에는 시속 a km의 속력으로, B에서 A로 올 때에는 시속 b km의 속력으로 다녀왔다. 다음 중 왕복 평균속력을 나타내는 식을 적은 것은? (단위: km/h)

① $\frac{a+b}{2}$

② $\sqrt{ab}$

③ $\frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

⑤ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

해설

A에서 B까지의 거리를 l km라 하면

가는데 걸린 시간 : $\frac{l}{a}$

오는데 걸린 시간 : $\frac{l}{b}$

왕복거리 : $2l$

따라서, 왕복평균속력은 $\frac{2l}{\frac{l}{a} + \frac{l}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

30. 분수함수 $y = \frac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2 \leq y \leq 0\}$

② $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$

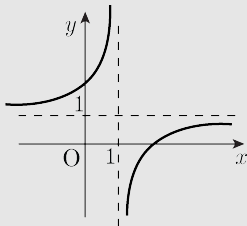
③ $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\}$

④ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

⑤ $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

해설

$$y = \frac{x-4}{x-1} = \frac{(x-1)-3}{x-1} = 1 + \frac{-3}{x-1}$$



$x = -2$ 일 때, $y = \frac{-2-4}{-2-1} = 2$ 이고,

$x = 0$ 일 때, $y = \frac{-4}{-1} = 4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

31. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때,
 $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

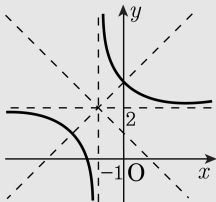
이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나고

기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.
 이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로
 직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

$$\therefore y = -x + 1$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로 $a - b = -2$

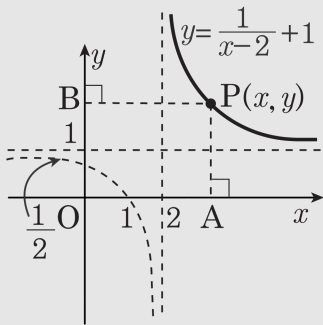


32. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1$ ($x > 2$) 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$$

(단, 등호는 $x-2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

33. $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때, $\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1 \pm 2x} &= \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2} \\ (\text{준식}) &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} \\ &= \frac{6}{6} = 1\end{aligned}$$

34. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$

② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$

④ $h(x) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots \textcircled{1}$$

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x \text{ 를 소거하면 } 2h(y) - 1 = g(h)$$

$$\text{그러므로 } h(y) = \frac{1}{2} \{g(h) + 1\}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$$

35. a, b 가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$ 을 만족하는 임의의 실수 x 에 대하여 $ax + 2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq bx + 2$ 가 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② 1

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 2

해설

$$\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \quad (2 \leq x \leq 3) \text{ 이므로}$$

$$ax + 2 \leq 2 + \frac{1}{x-1} \leq bx + 2$$

$$ax \leq \frac{1}{x-1} \leq bx$$

$$\text{위의 그래프에 의하여 } a \leq \frac{1}{6}, b \geq \frac{1}{2}$$

