

1. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 까지의 거리의 비가 1 : 2 인 점 P(x, y) 의 자취의 길이는?

- ① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

해설

좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 까지의 거리의 비가 1 : 2 인 점 P(x, y) 의 자취는

(-3, 0) 과 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 을 지름의 양 끝으로

하는 원이다.

즉 반지름이 $\frac{2}{3}$ 이 원의 둘레의 길이는 $\frac{8}{3}\pi$ 이다.

2. 두 점 A (1,1), B (7,4) 에서 이르는 거리의 비가 2 : 1 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan (\angle PAB)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

점 P 의 자취는 선분 AB 를 2 : 1 로
내분하는 점 C 와 2 : 1 로 외분하는 점
D 를

지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1} \right), \text{ 즉 } C(5,3)$$

점 D 의 좌표는

$$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1} \right) \text{ 즉, } D(13,7)$$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2} \right)$$

즉, M (9,5) 이므로

$$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가

(9,5) 이고 반지름의 길이가

$2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 20$$

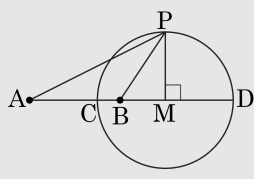
그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인

경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

$$\text{이 때, } \overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\overline{PM} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\tan (\angle PAB) = \tan (\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$



3. 두 원 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 1$, $x^2 + (y+2b)^2 = 9$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은?

- ① $a^2 + b^2 < 4$ ② $4 < a^2 + b^2 < 16$
③ $a^2 + b^2 < 16$ ④ $1 < 4a^2 + 9b^2 < 10$
⑤ $a^2 + b^2 < 25$

해설

두 원의 중심이 각각 $(-a, -b)$, $(0, -2b)$ 이므로
중심거리 d 는

$$d = \sqrt{(-a-0)^2 + \{-b-(-2b)\}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

따라서 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은

$$3-1 < \sqrt{a^2 + b^2} < 3+1,$$

$$\therefore 4 < a^2 + b^2 < 16$$

4. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2, 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

- ① $\frac{14}{3}\pi$ ② 5π ③ $\frac{16}{3}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{15}{4}\pi$

해설

x 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$
 $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $(-2 - a)^2 + b^2 = b^2 \Rightarrow a = -2$
 $(x + 2)^2 + (y - b)^2 = b^2$
 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 에 외접하므로 중심 사이의
거리는 반지름의 길이 합과 같다.
 $\Rightarrow \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 - b)^2} = b + 2$
 $\Rightarrow b = \frac{7}{4}$
 $\therefore 2 \cdot \pi \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{2}\pi$

5. 두 원 $x^2 + y^2 = 8^2$, $(x - 13)^2 + y^2 = 3^2$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① 10 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

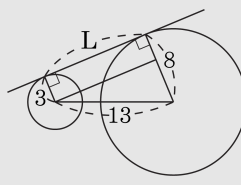
해설

중심사이 거리는 13 이고, 반지름 길이의 차는 5 이다.

두 원을 나타내면, 다음 그림과 같은 모양이다.

공통 외접선은 $L^2 = 13^2 - (8-3)^2 = 144$

$\therefore L = 12$



6. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 25$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이를 각각 구하면?
- ① $\sqrt{91}$, $\sqrt{103}$ ② $\sqrt{161}$, $\sqrt{145}$ ③ $\sqrt{165}$, $\sqrt{105}$
 ④ $\sqrt{151}$, $\sqrt{101}$ ⑤ $\sqrt{127}$, $\sqrt{105}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 3, 5 이고,
두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때,
O (0, 0), O' (12, 5) 이므로
중심거리는 $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ 이다.

(i) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{O'H'}$ 에
내린 수선의 발을 T 라고 하면
 $\overline{TH'} = \overline{OH} = 3$ 이므로
 $\overline{O'T} = 5 - 3 = 2$
한편, $\triangle OTO'$ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OT} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'T}^2} = \sqrt{13^2 - 2^2} = \sqrt{165}$$

이때, $\overline{HH'} = \overline{OT}$ 이므로
구하는 공통외접선의 길이는 $\sqrt{165}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{O'H'}$ 의
연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면
 $\overline{TH'} = \overline{OH} = 3$ 이므로 $\overline{O'T} = 5 + 3 = 8$
한편, $\triangle OTO'$ 은 직각삼각형이므로 피타고
라스의 정리에 의하여

$$\overline{OT} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'T}^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

이 때, $\overline{HH'} = \overline{OT}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 $\sqrt{105}$

7. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 밖의 한 점 $P(8, -4)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $3\sqrt{19}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $5\sqrt{19}$

해설

다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 $P(8, -4)$

에서

원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 에 접선을 그어

그 접점을 T , 이 원의 중심을 C 라고 하면

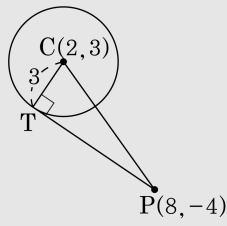
$\triangle PTC$ 는 $\angle PTC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이

므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PT}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CT}^2$$

$$= \{(8-2)^2 + (-4-3)^2\} - 3^2 = 76$$

$$\overline{PT} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$



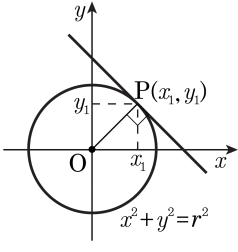
8. 점 P (3,0) 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

원의 중심을 C 라 하면 C (-2, -1) 이
므로
 $\overline{CP} = \sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2} = \sqrt{26}$
 $\overline{CQ} = \sqrt{10}$
따라서, $\triangle CPQ$ 는 $\overline{CP}$ 가 빗변인 직각
삼각형이므로
 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{26-10} = 4$

9. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $x_1x + y_1y = r^2$ 임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?



(i) P 가 $x_1 \neq 0$ 인 점이나 $y_1 \neq 0$ 인 점일 때, 점 $P(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $O(0,0)$ 을 지나는 직선 OP 의 기울기는 $\boxed{\text{가}}$ 이다. 그런데 점 P 에서의 접선은 직선 OP 와 수직이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은 $\boxed{\text{나}}$

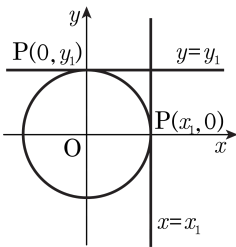
이 식을 정리하면

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 \dots\dots\text{㉠}$$

한편, 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로 $\boxed{\text{다}}$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2 \dots\dots\text{㉢}$$



(ii) P 가 $x_1 = 0$ 인 점이나 $y_1 = 0$ 인 점일 때, 점 P 의 좌표가 $(0, y_1)$ 또는 $(x_1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은 $\boxed{\text{라}}$㉣' 또는 $\boxed{\text{마}}$㉤" 이다. 이 때, $r = |y_1|$ 또는 $r = |x_1|$ 이므로

㉣' 또는 ㉤" 은 ㉢과 같은 식이다.

(i), (ii)로부터 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

① (가) : $\frac{y_1}{x_1}$

② (나) : $y - y_1 = \frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$

③ (다) : $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

④ (라) : $y = y_1$

⑤ (마) : $x = x_1$

해설

② (나) : $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$

10. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

11. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 8$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 이 되었다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 13

② 14

③ 15

④ 16

⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 (a, b) 라 하면,

$x^2 + y^2 = 8$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 의 중심인

$(4, 2)$ 의 중점은 $y = ax + b$ 위를 지나고,

두 점을 이은 직선과 $y = ax + b$ 는 수직이다.

따라서 중점인 $(2, 1)$ 를 $y = ax + b$ 에 대입하면 $1 = 2a + b$.

수직조건은 기울기의 곱이 -1 이므로

$y = ax + b$ 의 기울기가 a 이므로

두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$.

따라서 $a = -2, b = 5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20 - c = 8$.

$c = 12$

12. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x' + y'$ 을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$y = x + 2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
 $x' = y - 2$ $y' = x + 2$, $(x, y) = (3, 4)$ 이므로
 $x' = 2$ $y' = 5$, $\therefore x' + y' = 7$

13. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ㉡ $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 1인 ㉡이다.

14. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $x^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 2인 ④이다.

15. 다음 중 안에 알맞은 기호를 써 넣은 것을 골라라.

- ① {1} {2, 3}
- ② $\emptyset$ {1, 2, 3}
- ③ {1, 3, 9} {x|x는 9의 약수}
- ④ {2, 4, 6, 8} {x|x는 짝수}
- ⑤ {5} {x|x는 11보다 작은 2의 배수}

해설

- ① {1} {2, 3} $\rightarrow 1 \notin \{2, 3\}$
- ② $\emptyset$ {1, 2, 3} $\rightarrow \emptyset$ 는 모든 집합의 부분집합이다.
- ③ {1, 3, 9} {x|x는 9의 약수} $\rightarrow \{x|x는 9의 약수\} = \{1, 3, 9\}$
- ⑤ {5} {x|x는 11보다 작은 2의 배수} $\rightarrow 5 \notin \{x|x는 11보다 작은 2의 배수\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

16. $\{\{0\}, 1, 2, \{1, 2\}, \{\emptyset\}\}$ 를 원소로 가지는 집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\emptyset \in A$

② $\{0\} \subset A$

③ $\{1, 2\} \subset A$

④ $\{1\} \in A$

⑤ $\{\emptyset\} \subset A$

해설

① $\{\emptyset\} \in A$

② $\{\{0\}\} \subset A$

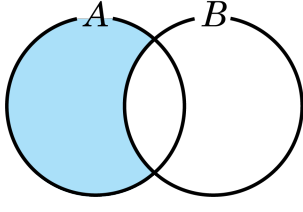
④ $1 \in A$

⑤ $\{\{\emptyset\}\} \subset A$

17. 다음 벤 다이어그램이 보기의 조건을 만족할 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.

보기

$$n(A) = 25, n(B) = 27, n(A \cap B) = 12$$



▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

색칠한 부분은 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 12 = 13$ 이다.

18. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여, $n(A) = 32$, $n(B) = 29$, $n((A \cup B)^c) = 11$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$$n(U) = 50, n(A) = 32, n(B) = 29$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 50 - 11 = 39$$

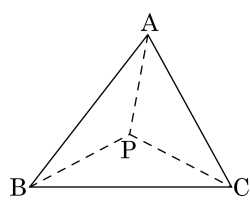
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$39 = 32 + 29 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 22$$

19. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

20. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$