1. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$(x+a)^2+(y-a)^2 = 2a^2-8a+15$$
$$= 2(a-2)^2+7$$
$$= (\text{반지름})^2$$

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

2. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y+a)^2 &= 2a^2+4a+5 \\ &= 2(a+1)^2+3\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

3. 점 (3, 0) 을 지나고 x 축과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원의 중심이 제1 사분면 위에 있을 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $-1 + \sqrt{2}$ ② $-2 + 2\sqrt{2}$ ③ $-3 + 3\sqrt{2}$

④ $-2 + 3\sqrt{2}$ ⑤ $-3 + 4\sqrt{2}$

해설

원이 점 $(3, 0)$ 을 지나고 x 축에 접하고,
중심이 제1 사분면 위에 있으므로
구하는 원의 방정식을
$(x-3)^2 + (y-b)^2 = b^2\ (b > 0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, 이 원과 직선 $y = x$ 도 접하므로
원의 중심 $(3, b)$ 에서
직선 $x - y = 0$ 에 이르는 거리는
원의 반지름의 길이 b 와 같다.

즉, $\dfrac{|3-b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = b, |3-b| = \sqrt{2}b$

양변을 제곱하면
$9 - 6b + b^2 = 2b^2, b^2 + 6b - 9 = 0$
$\therefore b = -3 \pm 3\sqrt{2}$
그런데 $b > 0$ 이므로
$b = -3 + 3\sqrt{2}$

4. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

5. 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취의 방정식을 구하면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다. 이때, $a+b+r$ 의 값은? (단, $r>0$)

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

$\overline{AP} = 2\overline{PB}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = 4\overline{PB}^2$

$(x+3)^2+y^2 = 4\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$

$3x^2+3y^2-30x+27=0,\ (x-5)^2+y^2=16$

$\therefore a=5,\ b=0,\ r=4$

$\therefore a+b+r=5+0+4=9$

6. 점 $A(0,6)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

원 위의 점을 $P(a,\ b)$,

선분 AP의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{6+b}{2}$$

$\therefore\ a=2x,\ b=2(y-3)\ \cdots\cdots$ ㉠

이 때, 점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4x^2+4(y-3)^2=4$

$\therefore\ x^2+(y-3)^2=1$

따라서, 선분 AP의 중점 M은 중심이 $(0,\ 3)$

이고, 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이므로

구하는 자취의 길이는 $2\pi\cdot 1=2\pi$

7. x축 및 y축에 접하고 원 $(x-7)^2+(y-6)^2=4$에는 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 25 ② 27 ③ 30 ④ 32 ⑤ 35

해설

조건을 만족시키는 원은 제 1사분면에 존재하므로, 원의 반지름을 a라 하면 중심의 좌표는 (a, a)가 된다.
주어진 원과 외접하기 위해서는 중심거리가 반지름의 합과 같아야 하므로

$$\sqrt{(7-a)^2+(6-a)^2}=a+2$$

$\therefore a^2-30a+81=0$

$\therefore$ (두 근의 합)$=30$

8. 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2-2y-3=0\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-4x+1=0\cdots\cdots$ ㉡

과 x, y에 대한 방정식

$\left(x^2+y^2-2y-3\right)+k\left(x^2+y^2-4x+1\right)=0$(단, k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉢

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α, β)라고 하면
> (가), (나)(←두 원은 모두 점 (α, β)를 지나므로) 이므로
> 임의의 실수 k에 대하여
> (다) (←(α, β)를 ㉢에 대입한 것과 같은 식) 이 성립한다.
> 따라서, (라) 의 그래프는 k의 값에 관계없이 (마),
> 즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2+\beta^2-2\beta-3=0$

② (나) : $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1=0$

③ (다) : $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α, β)

해설

(α, β) 를 ㉢ 에 대입한 식은 $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+k\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

9. 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고, 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2 ② 3.6 ③ 4.2 ④ 4.8 ⑤ 5.2

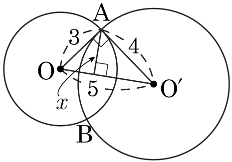
해설

△AOO′ 에서 넓이는 6 이다.

$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$

$\therefore x = \frac{12}{5}$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



10. 두 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, $(x-5)^2+(y-7)^2=9$ 의 공통접선의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{15}$　③ 4　④ $\sqrt{17}$　⑤ $\sqrt{21}$

해설

원의 중심 $(2,3)$과 $(5,7)$ 사이의 거리를 구하면
$\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$ 이므로
두원의 반지름이 5와 3이므로
$d<R+r$ 이므로 두 원은 두 점에서 만나므로
공통외접선만 구할 수 있다.
그러므로, 공통외접선의 길이는
$\sqrt{5^2-(5-3)^2}=\sqrt{21}$ 이다.

11. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

12. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

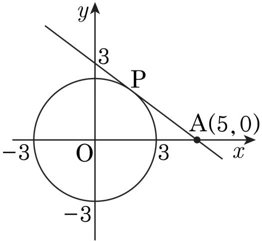
해설

접선이므로 원 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}$$

13. 점 A(5, 0) 에서 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 그은 한 접선의 접점을 P 라 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 2 ② 3 ③ 4

④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

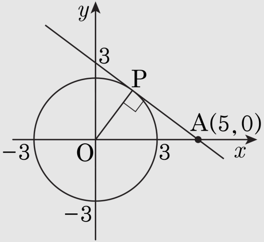
그림에서 $\overline{\mathrm{OP}} = 3$

$\overline{\mathrm{OA}} = 5$ 이고

$\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2}$$

$$= \sqrt{16} = 4$$



14. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

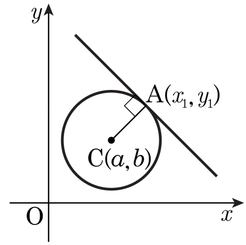
$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

15. 다음은 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ 으로 나타내어짐을 보인 것이다. 이 때, (가) ~ (마)에 알맞지 않은 것은?



점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $C(a, b)$ 를 지나는 직선 CA 의 기울기는 (가) 이다.
그런데 점 A 에서의 접선은 직선 CA 와 수직이므로
점 A 에서의 접선의 방정식은
$y - y_1 =$ (나) $(x - x_1)$
$\therefore (x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$
이 식을 변형하면
$(x_1-a)(x-a+a-x_1)+$(다)$=0$
$(x_1-a)(x-a)-(x_1-a)^2+(y_1-b)(y-b)-(y_1-b)^2=0$
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=$ (라) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 은
원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위에 있으므로
$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=$ (마) $\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

① (가): $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$

② (나): $-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$

③ (다): $(y_1-a)(y-a+a-y_1)$

④ (라): $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$

⑤ (마): r^2

해설

③ (다): $(y_1-b)(y-b+b-y_1)$

16. 원 $x^2+y^2=4^2$ 에 접하고, 기울기가 2 인 접선의 방정식이 $y=2x+a$ 일 때, a 의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$ ② $\pm 2\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 4\sqrt{5}$ ⑤ $\pm 5\sqrt{5}$

해설

기울기 m 일 때, 원의 접선 구하는 공식

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에 의해

$y=2x\pm 4\sqrt{1+2^2}$

$\therefore\ y=2x\pm 4\sqrt{5}$

17. 점 (3, 1) 에서 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x - y = 2,\ ax + by = 10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 12

해설

점 (3, 1) 을 지나므로 $3a + b = 10 \quad \cdots$ ㉠
원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|-10|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2},\quad a^2 + b^2 = 50 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면,

$a^2 + (10 - 3a)^2 = 50$

$10a^2 - 60a + 50 = 0$

$a^2 - 6a + 5 = 0$

$\therefore\ a = 1,\ 5$

$\therefore\ a = 5,\ b = -5$ 또는 $a = 1,\ b = 7$

한 접선의 방정식이 $x - y = 2$ 이므로,

$a = 1,\ b = 7$

$\therefore\ ab = 7$

18. 점 A(0, a)에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을

$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서

접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

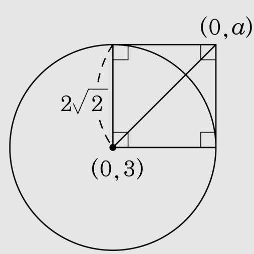
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$a-3=\pm4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$ 에서 $a=7$



19. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

20. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $4\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$4\left\{(x-3)^2+(y-2)^2\right\}=(x-6)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=8$

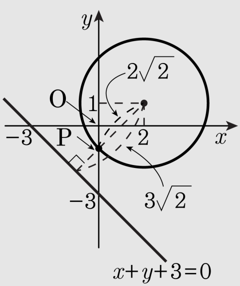
따라서 점 는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x+y+3=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$



21. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

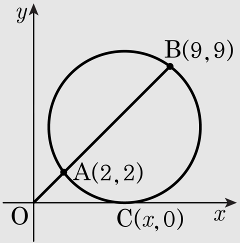
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$

$\therefore\ x = 6$



22. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$ ㉠

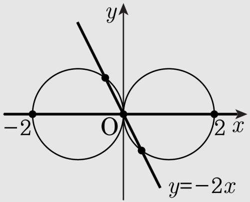
$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



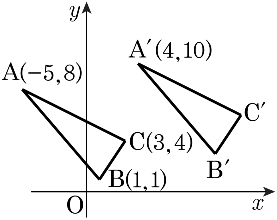
실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

23. 다음 그림의 삼각형 $A'B'C'$ 은 삼각형 ABC 를 평행이동한 도형이다. 두 점 B', C' 을 지나는 직선의 방정식이 $ax+by=24$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수)



① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle A'B'C'$ 는 $\triangle ABC$ 를 x 축 방향으로 9 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 $B'(10,\ 3)$, $C'(12,\ 6)$ 이다.

두 점 B', C' 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{6-3}{12-10}(x-10)$$

$3x-2y=24$,

$\therefore a+b=1$

24. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0\ \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

25. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$
즉, $12x+5y+k=0$
이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$$\frac{|17+k|}{13}=2$$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm 26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$9+(-43)=-34$

26. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(1,\ 2)$　③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$　⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 이다.

27. 점$(4,\ 3)$을 $y=2x$ 에 대칭이동한 점의 좌표는?

① $(0,\ 5)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $(-1,\ 2)$
④ $(0,\ -5)$ ⑤ $(-1,\ -2)$

해설

점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$을 직선 $y=2x$ 에 대칭 이동한 점을 $Q\ (\alpha,\ \beta)$ 라 할 때 직선 PQ 가 $y=2x$ 에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$ 이다.

$$\frac{\beta-3}{\alpha-4}=-\frac{1}{2}\cdots ㉠$$

점 P ,Q 의 중점 $\left(\dfrac{\alpha+4}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}\right)$ 이

직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$\frac{\beta+3}{2}=2\times\frac{\alpha+4}{2}\cdots ㉡$$

㉠,㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=0,\ \beta=5$

따라서 $(0,\ 5)$ 이다.

28. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

29. 감시 카메라의 서쪽 20km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 방향으로 매시 5km 의 속력으로 가고 있다. 감시 카메라로부터 15km 이내에 있는 배는 감시화면에 나타난다고 할 때, 이 배는 감시 화면에 몇 시간 동안 나타나는지 구하여라

▶ 답: ______ 시간

▷ 정답: 2 시간

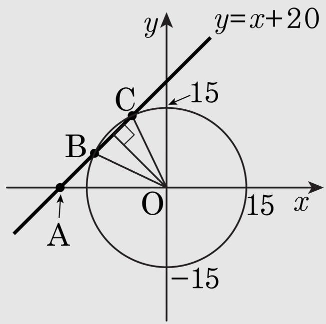
해설

감시카메라의 위치와 배의 처음 위치를 각각 $O(0,0), A(-20,0)$ 이라 하면, 배의 자취의 방정식은 $y=x+20(x \geq -20)$ 이다.
배가 B, C 위치 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면 된다.
$O(0,0)$ 에서 직선 $x-y+20=0$ 에 이르는 거리는

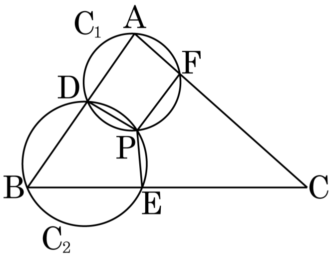
$$\frac{|20|}{\sqrt{1^2+1^2}}=10\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{15^2-(10\sqrt{2})^2}=10(\text{km})$$

따라서 배의 속력이 $5\,\text{km/h}$ 시이므로
이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은 2 시간이다.



30. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,

세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

31. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$인 원을 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동 하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=1$ ② $a^2+b^2=4$ ③ $a^2+b^2=9$

④ $a^2+b^2=16$ ⑤ $a^2+b^2=25$

해설

$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \cdots$ ㉠

원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼,

y 의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=4$

$\{x-(a+1)\}^2+\{y-(b-2)\}^2=4 \cdots$ ㉡

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$\therefore\ d=\sqrt{(a+1-1)^2+(b-2+2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}=2+2=4$

$\therefore\ a^2+b^2=16$

32. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

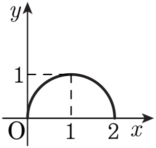
▶ 답 :

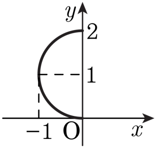
▷ 정답 : 2

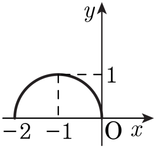
해설

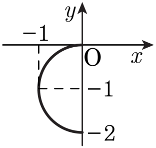
P(a, b)를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동
$\Rightarrow (a-2, -b+3)$
$y=-x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$
다시 점P와 일치하므로
$b-3=a, -a+2=b$ 에서
$a-b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$a+b=\ \ 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

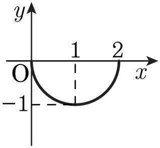
33. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

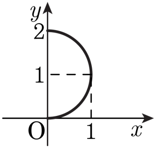


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.