**1.** $x$ 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$　② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$　④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면
$x$ 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

**2.** 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① $9\pi$ ② $16\pi$ ③ $25\pi$ ④ $36\pi$ ⑤ $49\pi$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면
$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$
즉 $4\overline{PB}^2=9\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\}=9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2=36\pi$

**3.** 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6ax - 8ay + 25a^2 - 4 = 0$ 과 외접하도록 상수 $a$ 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a > 0$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$C_1 : x^2 + y^2 = 9$
$C_2 : (x - 3a)^2 + (y - 4a)^2 = 4$ 이므로
두 원 $C_1, C_2$ 의 반지름의 길이는 각각 $3, 2$ 이고,
중심거리는 $\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$
이때, $3 + 2 = 5a$
$\therefore a = 1$

**4.** 두 원 $x^2+y^2-4x=0$ , $x^2+y^2-6y+8=0$ 의 공통외접선의 길이는?

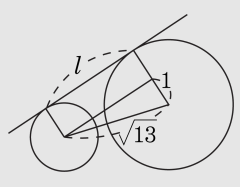
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$(x-2)^2+y^2=4,\ x^2+(y-3)^2=1$

$l=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$

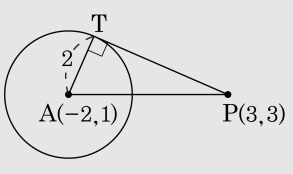


**5.** 점 (3, 3)에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{26}$　　③ 6　　④ $\sqrt{27}$　　⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로 중심이 $(-2,1)$, 반지름의 길이가 2 인 원이다.




$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$

$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2=25$

$\therefore \overline{PT}=5$

**6.** 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 $a$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

**7.** 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$\Rightarrow \dfrac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \Rightarrow 3m+n=6$

**8.** 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 $x$ 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 $x$좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

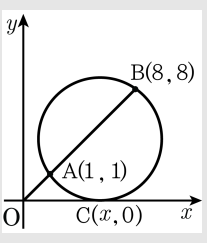
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



**9.** 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $4\sqrt{2}-5$　　⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

**10.** 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동했다고 할 때, $a+b$의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동하려면 $x$축 방향으로 $+5$, $y$축 방향으로 $+15$만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

**11.** 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \to (x+2,\ y-3)$에 의하여 직선 $x+2y-3=0$을 이동한 결과는 $x+2y+a=0$이다. 이 때, $a$의 값은?

① $-2$　　② $-1$　　③ $1$　　④ $2$　　⑤ $3$

해설

$f$는 $x$축의 방향으로 $+2$, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(x-2)+2(y+3)-3=0$ 으로 이동한다. 따라서 $a=1$

**12.** 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
$x$ 축의 방향으로 $a$ 만큼, $y$ 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

**13.** 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, $x$ 축 방향으로 $a$ 만큼, $y$ 축 방향으로 $b$ 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, $ab$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(-1,\ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$

$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 5$

**14.** 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$ , $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

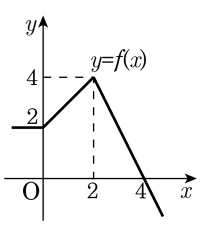
$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

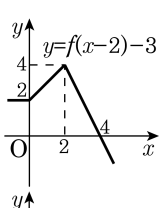
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

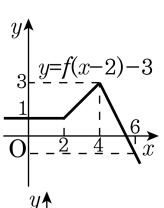
$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

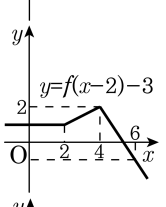
따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

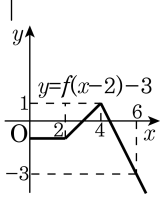
**15.** 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y = f(x-2)-3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

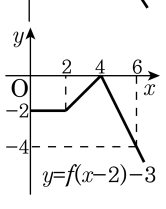



①



②


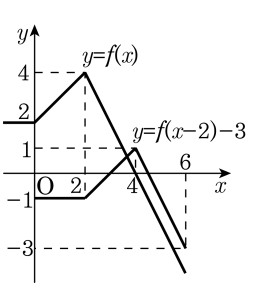

③



④



⑤



해설

$y = f(x-2)-3 \Leftrightarrow y+3 = f(x-2)$ 이므로 구하는 그래프는
$y = f(x)$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로 2 만큼,
$y$ 축의 방향으로 $-3$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



**16.** 다음 중 원 $x^2+y^2+8x+8y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{5}$　　② $x^2+y^2=3$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=16$　　④ $(x+1)^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{3}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+8x+8y+16=0$ 에서 $(x+4)^2+(y+4)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ③이다.

**17.** 다음에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 우리 중학교에서 키가 큰 학생의 모임
② 우리 중학교에서 학급 회장들의 모임
③ 0 보다 크고 1 보다 작은 자연수의 모임
④ 가장 작은 자연수의 모임
⑤ 0 에 가장 가까운 분수의 모임

해설
① '키가 큰' 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.
⑤ 0 에 가장 가까운 분수는 알 수 없다.

**18.** 다음 집합의 관한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A = \{\varnothing\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 일 때, $n(C) = 6$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = c$

⑤ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

해설

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$
④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 1$

**19.** 다음 $\square$ 안에 알맞은 짝수의 합을 구하여라.

보기

$\{x \mid x$는 $\square$의 약수$\} \subset \{x \mid x$는 8의 약수$\}$

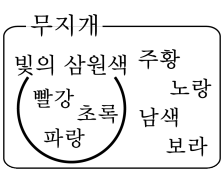
▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

8 의 약수는 1, 2, 4, 8 이므로 $\square$안에 들어갈 수 있는 수는 1, 2, 4, 8이다.
이 중 짝수는 2, 4, 8이다.
따라서 $2+4+8=14$이다.

**20.** 다음은 무지개 색상과 빛의 삼원색을 나타낸 것이다. 빛의 삼원색을 집합 $A$ 라고 하자. $\{$파랑, ㉠$\} \subset A$ 일 때, ㉠이 될 수 있는 색을 모두 구하여라.




▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 빨강

▷ 정답 : 초록

해설

집합 $A$ 를 원소나열법으로 나타내면
$A = \{$빨강, 파랑, 초록$\}$ 이다.
따라서 $\{$파랑, ㉠$\} \subset A$ 는 $A$ 의 부분집합을 나타내므로 ㉠은 빨강 또는 초록이다.

**21.** 전체집합 $U$ 의 부분집합 $A$, $B$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $U \neq \varnothing$ )

① $A \cup B = B$　　② $A \cap B = A$　　③ $A^c \supset B^c$

④ $B - A = \varnothing$　　⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

④ $A$ 가 $B$ 에 포함되므로 공집합이 아닌 다른 집합이 나와야 한다.

**22.** 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $n(\varnothing) + n(\{0\}) + n(\{\varnothing\}) = 2$

② $n(\{10,\ 11,\ 12\}) - n(\{2,\ 5\}) = 1$

③ $A \subset B$ 이면, $n(A) \le n(B)$ 이다.

④ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

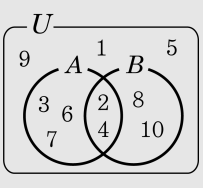
④ 반례 : $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$

**23.** 전체집합 $U = \{x | x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A$, $B$ 에 대하여 $B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B - A = \{8, 10\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 일 때, 집합 $A$ 의 원소가 <u>아닌</u> 것은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면




$\therefore\ A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

[별해] $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 이므로

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이다.

$A = (A \cup B) - (B - A) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

**24.** 집합 $A = \{a, b, a+2\}$, $B = \{2, 5, 7\}$일 때, $(A - B) \cup (B - A) = \varnothing$을 만족하는 상수 $a, b$에 대하여 $a + 2b$의 값은?

① 5　　② 7　　③ 9　　④ 11　　⑤ 13

해설

$(A - B) \cup (B - A) = \varnothing$이므로
$A - B = \varnothing$이고 $B - A = \varnothing$이다.
$A - B = \varnothing$이면 $A \subset B$이고
$B - A = \varnothing$이면 $B \subset A$이므로 $A = B$
$A = \{a, b, a+2\}$, $B = \{2, 5, 7\}$에서
$a$와 $a+2$의 차가 2이므로 $a = 5, a+2 = 7, b = 2$
$\therefore a + 2b = 9$

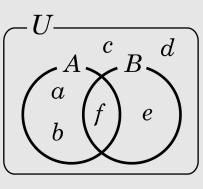
**25.** 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 $A, B$ 에 대하여 $A - B = \{a, b\}$ , $B - A = \{e\}$ , $A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 $A^c$ 은?

① $\{b\}$　　② $\{e\}$　　③ $\{b, e\}$

④ $\{c, d\}$　　⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



**26.** 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a,\ b) | a \in A,\ b \in B\}$ 라고 정의한다.
$n(A \cup B) = 10,\ n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A) \times n(B)$ 의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$\therefore n(A) + n(B) = 18$
따라서 $A, B$ 의 원소의 개수는 각각 최대 9개씩 들어가야 한다.
따라서 최댓값은 $9 \times 9 = 81$

**27.** 세 조건$p$, $q$, $r$에 대한 다음 추론 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $p \to \sim q$ 이고 $r \to q$ 이면 $p \to \sim r$ 이다.

② $p \to \sim q$ 이고 $\sim r \to q$ 이면 $p \to r$ 이다.

③ $q \to \sim p$ 이고 $\sim q \to r$ 이면 $p \to r$ 이다.

④ $p \to q$ 이고 $\sim r \to \sim q$ 이면 $p \to r$ 이다.

⑤ $p \to q$ 이고 $q \to p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \to q$, $q \to p$이면 $p \leftrightarrow q$이다.

**28.** 두 조건 $p : |x-1| = 2$ , $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 $p$ 는 $q$ 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : _____ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\},\ Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

**29.** 조건 $p : x-2 \neq 0$가 $q : x^2 - ax + 4 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, $a$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$p$가 $q$이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 또, 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $p \Rightarrow q$
즉,'$x-2=0$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$이다'가 참이다.
$\therefore 4 - 2a + 4 = 0 \therefore a = 4$

**30.** 네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$ 에 대하여 $p$ 는 $r$ 이기 위한 충분조건, $q$ 는 $r$ 이기 위한 충분조건, $s$ 는 $r$ 이기 위한 필요조건, $q$ 는 $s$ 이기 위한 필요조건이다. 이 때, $q$는 $p$이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : _____ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 $p$ 이기 위한 필요조건

**31.** $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$
$= ay + bx - ax - by$
$= a(y-x) - b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b > 0,\ y-x < 0$
$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

**32.** $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로

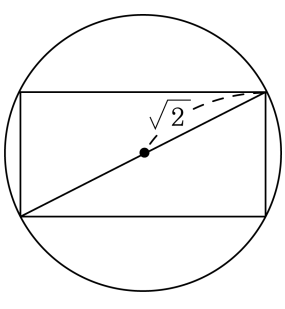
$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x}$에서

$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$

$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$

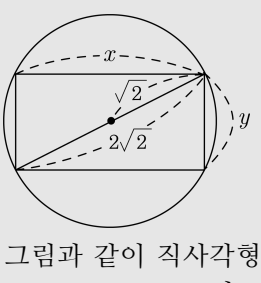
$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$

**33.** 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?




① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설




그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.