

1. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 169$

② $x^2 + (y - 5)^2 = 169$

③ $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

④ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 169$

⑤ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면

x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로

$$(3 - a)^2 + (1 - b)^2 = b^2 \dots\dots \text{㉠}$$

$$(-4 - a)^2 + (8 - b)^2 = b^2 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠ - ㉡에서

$$b = a + 5 \dots\dots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$a^2 - 8a = a(a - 8) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 8$$

㉢에서 $a = 0$ 일 때 $b = 5$, $a = 8$ 일 때 $b = 13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \text{ 또는}$$

$$(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 13^2$$

2. 두 점 A(3,0), B(-2,0) 에서의 거리의 비가 2 : 3 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π

② 16π

③ 25π

④ 36π

⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 (7, 0) 이고,

반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로

구하는 자취의 넓이는 $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$

3. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6ax - 8ay + 25a^2 - 4 = 0$ 과 외접하도록 상수 a 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$C_1 : x^2 + y^2 = 9$$

$$C_2 : (x - 3a)^2 + (y - 4a)^2 = 4 \text{ 이므로}$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 3, 2 이고,

$$\text{중심거리는 } \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

$$\text{이때, } 3 + 2 = 5a$$

$$\therefore a = 1$$

4. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ 의 공통외접선의 길이는?

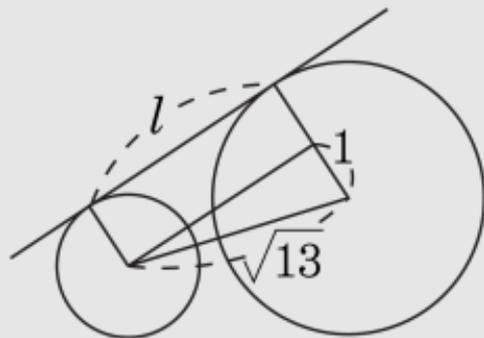
- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$$(x-2)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$l = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

∴ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



5. 점 (3, 3)에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5

② $\sqrt{26}$

③ 6

④ $\sqrt{27}$

⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$

이므로

중심이 $(-2, 1)$, 반지

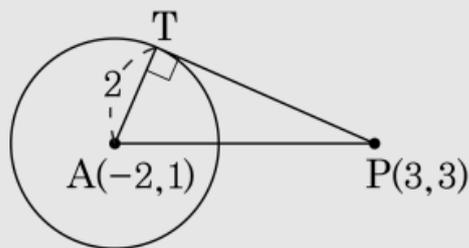
름의 길이가 2인 원이

다.

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2$$

$$= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 = 25$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$



6. 직선 $ax + (1 - a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1 - a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1 - a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

7. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

8. 좌표평면 위의 두 점 $(1, 1)$, $(8, 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 4

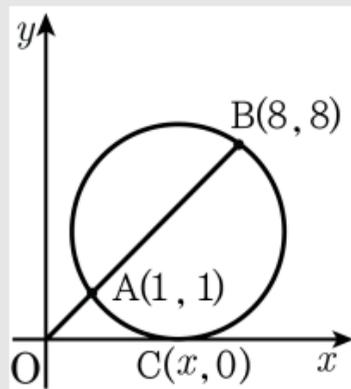
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$$

$$\therefore x = 4$$



9. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$$

10. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동하려면 x 축 방향으로 +5, y 축 방향으로 +15만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a = 5, b = 15$

11. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$ 에 의하여 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 이동한 결과는 $x + 2y + a = 0$ 이다. 이 때, a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

f 는 x 축의 방향으로 +2, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(x - 2) + 2(y + 3) - 3 = 0$ 으로 이동한다. 따라서 $a = 1$

12. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 에 의해 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 는 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하는 것이므로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동하면 원의 중심 $(0, 0)$ 은 $(a, 4)$ 로 옮겨진다.

이 때, 두 점 $(0, 0)$ 과 $(a, 4)$ 의 거리가 5 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 5$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

13. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3, 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (-1, 2) &\xrightarrow{\text{원점대칭}} (1, -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2) \\ &\xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2 + b) \\ &\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2 + b, 1 + a) = (3, 2) \\ \therefore a = 1, b = 5 \end{aligned}$$

14. 점 $(1, 2)$ 를 직선 $y = 2x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, 실수 a, b 에 대하여 $5(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1, 2), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2} \right)$$

이 점이 직선 $y = 2x + 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2} = 2 \cdot \frac{1+a}{2} + 1$$

$$\therefore 2a - b = -2 \quad \text{..... ㉠}$$

또한, 두 점 $(1, 2), (a, b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y = 2x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1} = -\frac{1}{2}$$

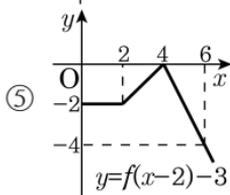
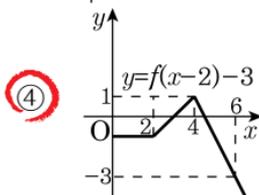
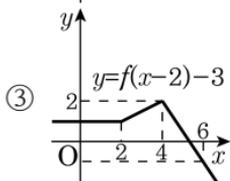
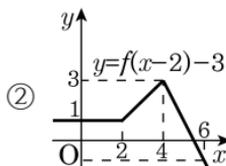
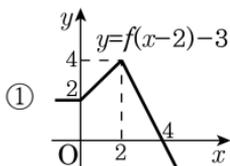
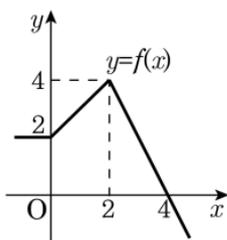
$$\therefore a + 2b = 5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서, } 5(a+b) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{12}{5} \right) = 5 \cdot \frac{13}{5} = 13$$

15. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y = f(x-2) - 3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



해설

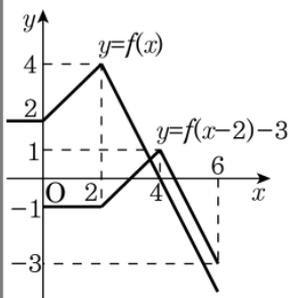
$$y = f(x-2) - 3 \Leftrightarrow y + 3 = f(x-2)$$

이므로 구하는 그래프는

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



16. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$

② $x^2 + y^2 = 3$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{3}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0$ 에서 $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ③이다.

17. 다음에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① 우리 중학교에서 키가 큰 학생의 모임
- ② 우리 중학교에서 학급 회장들의 모임
- ③ 0 보다 크고 1 보다 작은 자연수의 모임
- ④ 가장 작은 자연수의 모임
- ⑤ 0 에 가장 가까운 분수의 모임

해설

- ① ‘키가 큰’ 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.
- ⑤ 0 에 가장 가까운 분수는 알 수 없다.

18. 다음 집합의 관한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A = \{\emptyset\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(C) = 6$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = c$

⑤ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

해설

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 1$

19. 다음 안에 알맞은 짝수의 합을 구하여라.

보기

$$\{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\} \subset \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

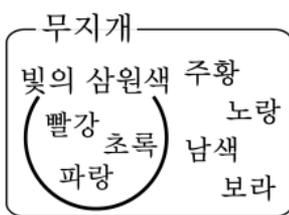
해설

8의 약수는 1, 2, 4, 8 이므로 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 2, 4, 8이다.

이 중 짝수는 2, 4, 8이다.

따라서 $2 + 4 + 8 = 14$ 이다.

20. 다음은 무지개 색상과 빛의 삼원색을 나타낸 것이다. 빛의 삼원색을 집합 A 라고 하자. $\{\text{파랑}, \textcircled{\gamma}\} \subset A$ 일 때, $\textcircled{\gamma}$ 이 될 수 있는 색을 모두 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 빨강

▷ 정답: 초록

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{\text{빨강}, \text{파랑}, \text{초록}\}$ 이다.

따라서 $\{\text{파랑}, \textcircled{\gamma}\} \subset A$ 는 A 의 부분집합을 나타내므로 $\textcircled{\gamma}$ 은 빨강 또는 초록이다.

21. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $U \neq \emptyset$)

① $A \cup B = B$

② $A \cap B = A$

③ $A^c \supset B^c$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

④ A 가 B 에 포함되므로 공집합이 아닌 다른 집합이 나와야 한다.

22. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(\emptyset) + n(\{0\}) + n(\{\emptyset\}) = 2$

② $n(\{10, 11, 12\}) - n(\{2, 5\}) = 1$

③ $A \subset B$ 이면, $n(A) \leq n(B)$ 이다.

④ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

④ 반례 : $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

23. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B - A = \{8, 10\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 원소가 아닌 것은?

① 2

② 3

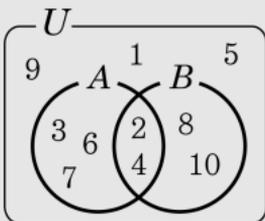
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면



$$\therefore A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

[별해] $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 이므로

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이다.

$$A = (A \cup B) - (B - A) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

24. 집합 $A = \{a, b, a + 2\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ 일 때, $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 을 만족하는 상수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 의 값은?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

⑤ 13

해설

$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이므로

$A - B = \emptyset$ 이고 $B - A = \emptyset$ 이다.

$A - B = \emptyset$ 이면 $A \subset B$ 이고

$B - A = \emptyset$ 이면 $B \subset A$ 이므로 $A = B$

$A = \{a, b, a + 2\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ 에서

a 와 $a + 2$ 의 차이가 2이므로 $a = 5, a + 2 = 7, b = 2$

$\therefore a + 2b = 9$

25. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{e\}$, $A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

① $\{b\}$

② $\{e\}$

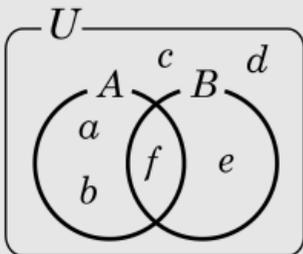
③ $\{b, e\}$

④ $\{c, d\}$

⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



26. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 라고 정의한다.

$n(A \cup B) = 10$, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A) \times n(B)$ 의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 18$$

따라서 A, B 의 원소의 개수는 각각 최대 9개씩 들어가야 한다.

따라서 최댓값은 $9 \times 9 = 81$

27. 세 조건 p, q, r 에 대한 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

① $p \rightarrow \sim q$ 이고 $r \rightarrow q$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ 이다.

② $p \rightarrow \sim q$ 이고 $\sim r \rightarrow q$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.

③ $q \rightarrow \sim p$ 이고 $\sim q \rightarrow r$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.

④ $p \rightarrow q$ 이고 $\sim r \rightarrow \sim q$ 이면 $p \rightarrow r$ 이다.

⑤ $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 이면 $p \leftrightarrow q$ 이다.

28. 두 조건 $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이

$P = \{-1, 3\}$, $Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

29. 조건 $p : x - 2 \neq 0$ 가 $q : x^2 - ax + 4 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 또, 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $p \Rightarrow q$

즉, ' $x - 2 = 0$ 이면 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이다'가 참이다.

$$\therefore 4 - 2a + 4 = 0 \therefore a = 4$$

30. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q$ 이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

31. $a > b$, $x > y$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a + b)(x + y) > 2(ax + by)$

② $(a + b)(x + y) < 2(ax + by)$

③ $(a + b)(x + y) \geq 2(ax + by)$

④ $(a + b)(x + y) \leq 2(ax + by)$

⑤ $(a + b)(x + y) = 2(ax + by)$

해설

$$\begin{aligned}(a + b)(x + y) - 2(ax + by) &= ay + bx - ax - by \\ &= a(y - x) - b(y - x) \\ &= (a - b)(y - x)\end{aligned}$$

그런데 $a - b > 0$, $y - x < 0$

$$\therefore (a + b)(x + y) < 2(ax + by)$$

32. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

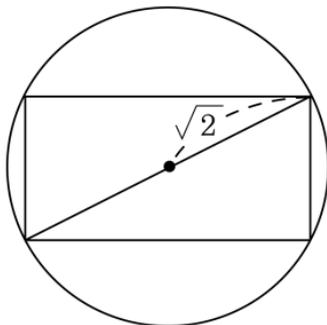
$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

33. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

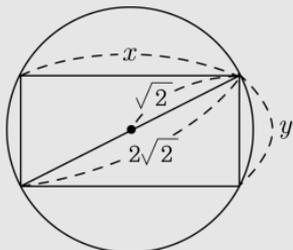
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.