

1. 세 점 $A(2, 3)$, $B(-1, 9)$, $C(-4, a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 기울기가 같다.

$$\overline{AB} \text{의 기울기: } \frac{3-9}{2-(-1)} = -2$$

$$\overline{BC} \text{의 기울기: } \frac{a-3}{(-4)-(2)} \therefore a = 15$$

2. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

3. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x + \sqrt{2}y = 4$

② $x + \sqrt{3}y = 4$

③ $\sqrt{2}x + y = 4$

④ $\sqrt{3}x + y = 4$

⑤ $x - \sqrt{3} = 4$

해설

$(1, \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$$1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 4$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$

② $2\sqrt{17}$

③ $5\sqrt{13}$

④ $3\sqrt{17}$

⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은

$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

5. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(0, -2)$

③ $(1, 2)$

④ $(-1, 3)$

⑤ $(2, 1)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면

$$(-2 - 0)^2 + (1 - \alpha)^2 = (0 - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha = -2$$

6. 세 점 A(6,1), B(-1,2), C(2,3)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① (2, -1)

② (2, -2)

③ (3, -2)

④ (2, 2)

⑤ (1, -2)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB}$

즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore 7a - b = 16 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore 2a - b = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = 2, b = -2$$

$$\therefore O(2, -2)$$

7. 두 정점 A(1, 2), B(-3, 0) 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분선이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

8. 세 직선 $l_1 : ax + y + 2 = 0$, $l_2 : bx - 3y - 3 = 0$, $l_3 : (b+2)x + y - 2 = 0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$(-a) \cdot \frac{b}{3} = -1, \quad \therefore ab = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.

$$-a = -b - 2, \quad \therefore a - b = 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 이용하면

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4 + 6 = 10$$

9. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$$3x - y - 6 = 0, \quad 3x - y + k = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선 $3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

10. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

11. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 에 의해 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 는
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동하면 원의 중심
 $(0, 0)$ 은 $(a, 4)$ 로 옮겨진다.

이 때, 두 점 $(0, 0)$ 과 $(a, 4)$ 의 거리가 5 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 5$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

12. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 직선 $y = mx$ 에 접한다고 한다. 이때, 이를 만족하는 모든 상수 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{12}{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여
대칭이동하면 $(-x)^2 + y^2 - 6(-x) + 4y + 9 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

$$\therefore (x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

이 원이 직선 $y = mx$ 에 접하므로 원의 중심
 $(-3, -2)$ 에서 직선 $mx - y = 0$ 에 이르는 거리는
반지름 2 와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|-3m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

이것을 정리하여 풀면 $m = 0$ 또는 $m = \frac{12}{5}$

따라서 모든 상수 m 의 합은 $\frac{12}{5}$

13. 직선 $y = x + 1$ 에 관해서 점 $A(-2, 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x + 1$ 에 $A(-2, 3)$ 에 대칭인 점은 A' 이므로 $\overline{AA'}$ 의 중점은 $y = x + 1$ 위의 점이다.

$$\frac{-2 + a}{2} + 1 = \frac{3 + b}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $\overline{AA'}$ 의 기울기와 $y = x + 1$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로

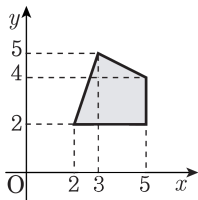
$$\left(\frac{b - 3}{a + 2}\right) \times 1 = -1$$

$$\therefore b - 3 = -a - 2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

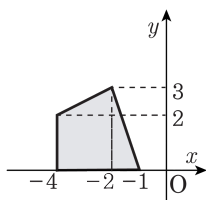
$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에 의해 $a = 2$, $b = -1$

$$\therefore (2, -1)$$

14. 그림 (가)의 도형은 평행 이동 및 대칭이동에 의해 그림 (나)로 이동한다. 그림 (가)의 도형의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, 그림 (나)의 도형의 방정식은?



(가)



(나)

① $f(x + 1, y + 2) = 0$

② $f(x + 1, y - 2) = 0$

③ $f(-x - 1, y - 2) = 0$

④ $f(-x + 1, y - 2) = 0$

⑤ $f(-x + 1, y + 2) = 0$

해설

그림 (가)의 도형이 y 축에 대해 대칭되고
 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 이동되었으므로
 그림 (나)의 도형의 방정식은
 $f(-x + 1, y + 2) = 0$ 이 된다.

15. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

16. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개라고 할 때, 자연수 n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^{(1을 제외한 원소의 개수)} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$$

17. 세 자리의 자연수 중에서 백의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 A , 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 B , 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 C 라 할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

백의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합과 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합, 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합의 교집합은 세 자리 모두 4의 배수인 수로 이루어진 수의 집합이다. 따라서 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 각각 4의 배수인 4, 8이 올 수 있으므로 2가지씩이다.

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

18. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right),$$

$$C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

19. 집합 $A_a = \{x \mid x \text{는 } a \text{의 배수}\}$, 집합 $B_b = \{x \mid x \text{는 } b \text{의 약수}\}$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $A_2 \subset A_4$

② $B_2 \subset B_4$

③ $A_4 = B_4$

④ $n(B_{15}) = 5$

⑤ $A_8 \subset A_4 \subset A_2$

해설

$$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

$$A_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$A_8 = \{8, 16, 24, \dots\}$$

$$B_2 = \{1, 2\}$$

$$B_4 = \{1, 2, 4\}$$

$$B_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

① $A_4 \subset A_2$ ③ $A_4 \neq B_4$ ④ $n(B_{15}) = 4$

20. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

㉠ $X \subset A$

㉡ $\{3, 5\} \subset X$

㉢ $n(X) \leq 5$

① 12 개

② 13 개

③ 14 개

④ 15 개

⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 $\{3, 5\}$ 를 반드시 포함하며 원소의 개수가 5 개이하인 부분집합이다.

원소의 개수가 2개인 부분집합 : $\{3, 5\}$

원소의 개수가 3개인 부분집합 : $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 5, 11\}$

원소의 개수가 4개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 9\}, \{1, 3, 5, 11\}, \{3, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 9, 11\}$

원소의 개수가 5개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{1, 3, 5, 7, 11\}, \{1, 3, 5, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 9, 11\}$

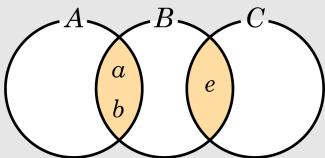
21. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cap B = \{a, b\}$, $B \cap C = \{e\}$, $C \cap A = \emptyset$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, h\}$, $B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라.

▶ 답 :

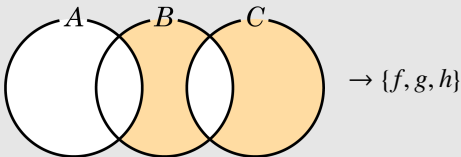
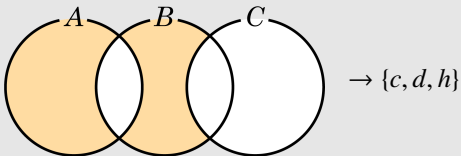
▷ 정답 : $\{a, b, e, h\}$

해설

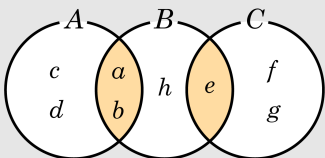
우선 세 조건 $A \cap B = \{a, b\}$, $B \cap C = \{e\}$, $C \cap A = \emptyset$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



다음으로 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, h\}$, $B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$ 이므로



따라서 이상의 조건을 모두 조합하면 집합 A, B, C 는 다음과 같다.



그러므로 $B = \{a, b, e, h\}$ 이다.

22. 두 집합 $A = \{4, 6, x\}$, $B = \{1, 3, x+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 를 만족할 때, x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, x, x+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 $x = 2$, $x+3 = 5$ 이다. 따라서 $x = 2$

23. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 10\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $B \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$, $B \cup X = X$ 이므로 $B \subset X \quad \therefore B \subset X \subset A$

즉, $\{4, 10\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 4, 10을 반드시 포함하는 집합이므로 개수는

$2^{5-2} = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)이다.

24. 이차방정식 $x^2 - 4x + 4a = 0$ (a 는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1 + \frac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4 - 4a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

$$\therefore (a-1) + \frac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{9}{(a-1)}} = 6$$

따라서 최솟값은 6