1. 두 원 $x^2+y^2-2ax+8a-25=0$과 $x^2+y^2=1$이 외접하도록 실수 a의 값을 정하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^2+y^2-2ax+8a-25=0$

$(x-a)^2+y^2=a^2-8a+25 \quad \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 중심은 $(a,0)$, 반지름의 길이는

$\sqrt{a^2-8a+25}$이고,

㉡의 중심은 $(0,0)$, 반지름의 길이는 1이다.

㉠과 ㉡이 외접하므로

$\sqrt{a^2-8a+25}+1=\sqrt{a^2+0}$,

$\sqrt{a^2-8a+25}=|a|-1$

$a^2-8a+25=a^2-2|a|+1, -8a+2|a|=-24$

 i) $a \geq 0$일 때, $-8a+2a=-24$

$\therefore a=4$

 ii) $a<0$일 때, $-8a-2a=-24$

$\therefore a=\dfrac{12}{5}$

이것은 $a<0$임에 모순이다.

따라서 i), ii)에 의하여 $a=4$

2. 원 $x^2+y^2=k$ 와 직선 $y=-x+1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k>0$)

① $0<k<\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}<k<1$ ③ $1<k<\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2}<k<2$ ⑤ $k>2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이 r 에 대하여 $d>r$ 이어야 한다.

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{k}\ (\text{단, } k>0\ )$$

$$\therefore 0<k<\frac{1}{2}$$

3. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿ 개

▷ 정답: 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ $\therefore$ 19 개

4. $x^2+y^2=1$과 직선 $y=ax+1$과의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 1이 되는 양수 a의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

해설

원점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 다음의 그림에서

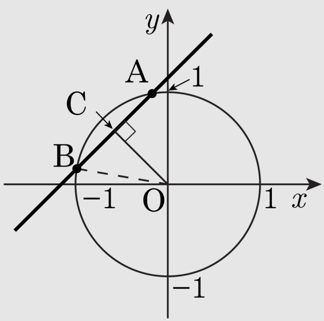
$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

($\because$ 피타고라스의 정리) 즉, O에서 직선 $y=ax+1$에 이르는 거리 d가

$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ 3a^2+3=4\ ,\ a^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

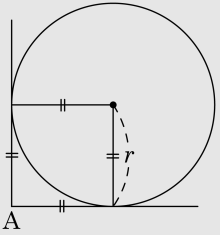


5. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

6. 점 $(2,\ 3)$ 을 점$(1,\ 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 직선 $y=3x-2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2,3)$ 이 점$(1,5)$ 로 옮겨지므로

$T:(x,y)\to(x+m,y+n)$이라고 하면,

$(2,3)\xrightarrow{T}(1,5)$ 에서

$2+m=1, 3+n=5 \qquad \therefore m=-1, n=2$

$\therefore T:(x,y)\to(x-1,y+2)$

따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.

한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가

옮겨지는 직선의 방정식은

$y-2=a(x+1)+b$

$\therefore y=ax+a+b+2 \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠이 $y=3x-2$ 와 같아야 하므로

$a=3, a+b+2=-2$

$\therefore a=3, b=-7 \qquad \therefore ab=-21$

7. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(-1,\ \ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ \ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$

$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a)=(3,\ 2)$

$\therefore\ a=1,\ b=5$

8. 두 점 A$(-6,\ 1)$, B$(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서

$$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$$

$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

9. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ ② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $x^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

10. 세 집합 $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 12보다 작은 홀수$\}$, $C=\{x \mid x$는 $12\times x=1$을 만족하는 자연수$\}$ 에 대하여 $n(A)+n(B)+n(C)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이므로 $n(A)=6$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$ 이므로 $n(B)=6$

$C=\{x \mid x$는 $12\times x=1$을 만족하는 자연수$\}=\varnothing$ 이므로 $n(C)=0$

$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=6+6+0=12$

11. $\{a,\ c\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5 ② 8 ③ 10 ④ 16 ⑤ 32

해설

집합 X 는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합이면서 $a,\ c$ 를 포함하는 집합이므로 $\{b,\ d,\ e\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 = 8$(개)

12. 다음 중 참인 명제는?

① 직사각형은 마름모이다.

② 평행사변형은 직사각형이다.

③ 사다리꼴이면 정사각형이다.

④ 정삼각형이면 이등변삼각형이다.

⑤ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90°$ 이다.

해설

④ 이등변삼각형의 집합은 정삼각형의 집합을 포함하고 있으므로 참이다.

13. p : $|x-1| \le h$, q : $|x+2| \le 7$ 에 대하여 'p 이면 q 이다' 가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \ge 0$)

① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
$|x-1| \le h$ 에서 $-h \le x-1 \le h$ 이므로
$-h+1 \le x \le h+1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
$|x+2| \le 7$ 에서 $-7 \le x+2 \le 7$ 이므로
$-9 \le x \le 5$
$P \subset Q$ 이어야 하므로
$-h+1 \ge -9$ 에서
$h \le 10$
$h+1 \le 5$ 에서 $h \le 4$
따라서 $0 \le h \le 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

14. 명제 '$2x^2+ax-9 \neq 0$ 이면 $x-3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

대우인 '$x-3=0$ 이면 $2x^2+ax-9=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$2\cdot 3^2+3a-9=0,\ 3a+9=0$

$\therefore\ a=-3$

15. $x > 0,\ y > 0,\ \ x + 2y = 1$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy},\ \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy},\ \frac{1}{8} \geq xy$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$ 이므로 $xy = \frac{1}{8}$ 일 때 최소

$\therefore\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$

해설

$x + 2y = 1$ 이면 $y = \frac{1-x}{2}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$x(1-x) = -x^2 + x = (x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$

$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

$\therefore\ x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

이때 $\frac{2}{x(1-x)}$ 의 최솟값은 $\frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

16. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

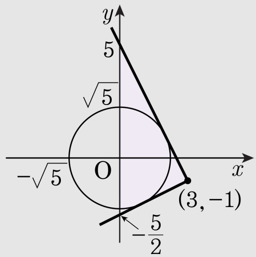
해설

점 $(3,\ -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y+1=m(x-3)$이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y+1=m(x-3)$,

즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로



$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$2m^2+3m-2=0,\ (2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

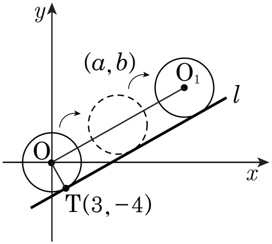
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2},\ y=-2x+5$ 이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$ 이다.

$\therefore\ 4S=45$

17. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, -4) 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O′ 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T(3, -4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O′ 의 중심이 (a,b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO′ 의 기울기와 같고,

직선 OO′ 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a}=$ (직선 OO′ 의 기울기)$=$ (직선 l 의 기울기)$=\frac{3}{4}$

18. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

: $y = 3(x - a) \Rightarrow \quad 3x - y - 3a = 0$

원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$a = \pm\sqrt{10}$

$\therefore \; a^2 = 10$

19. $A = \{1,\ \{2,\ 3\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{2,\ 3\} \in A$　② $\{2,\ 3\} \subset A$　③ $\{1,\ \{2,\ 3\}\} \subset A$

④ $1 \in A$　⑤ $\{2,\ 3\} \in A$

해설

② $\{2,\ 3\} \not\subset A$

20. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 가 되지 <u>않는</u> 경우를 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $A \subset C$ ㄴ $A = C$

ㄷ $C \subset A$ ㄹ $A = B$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $A = B = C$ 가 아니어도 항상 $A \subset C$ 이다.

ㄹ $A = B \subset C$ 일 때, $C \subset B$ 인지 알 수 없으므로 $A = B = C$ 가 아니다.

21. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$, $B = \{x \mid x$는 5 미만의 자연수$\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$에 대하여 $A \cap (B \cup C)$를 원소나열법으로 옳게 나타낸 것은?

① $\{2,\ 4\}$ ② $\{4,\ 10\}$ ③ $\{2,\ 3,\ 4\}$

④ $\{2,\ 4,\ 10\}$ ⑤ $\{2,\ 4,\ 6,\ 10\}$

해설

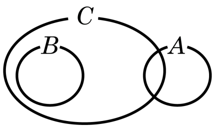
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$

$$A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$$
$$= \{2,\ 4,\ 10\}$$

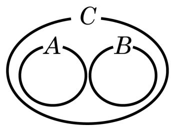
22. 다음 세 명제 p, q, r가 모두 참일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?

$p : x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. $q : x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. $r : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.

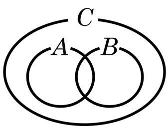
①



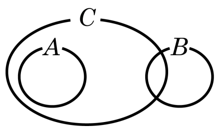
②



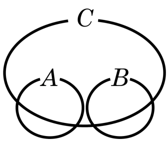
③



④



⑤



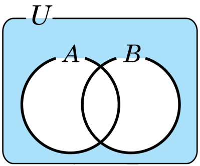
해설

p : $x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $A \subset C$

q : $x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. 따라서 $A \cap B = \varnothing$

r : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다. 즉 $x \in B$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $B \subset C$

23. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U)=45$, $n(A)=17$, $n(B)=24$, $n(A\cap B)=8$일 때, 색칠한 부분에 해당하는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

색칠하지 않은 부분이 의미하는 집합은 $A\cup B$이다.
따라서 색칠한 부분에 해당하는 원소의 개수는 전체집합의 원소의 개수에서 $A\cup B$의 원소의 개수를 뺀 것과 같다.
$n(A\cup B)=17+24-8=33$이므로 $n(U)-n(A\cup B)=45-33=12$이다.

24. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

25. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$이므로

$$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$$

$x+y+z=1$이므로

$$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\qquad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(\text{준식})\geq 8+36+81=125$