

1. 집합 $A = \{x \mid x = 3 \times n - 1, n = 5 \text{ 미만의 자연수}\}$ 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$A = \{2, 5, 8, 11\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $2 + 5 + 8 + 11 = 26$ 이다.

2. 다음 중 명제 ' x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0, y = 2$

② $x = 1, y = 2$

③ $x = 0, y = \sqrt{2}$

④ $x = 1, y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

해설

' x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이는 ' x 또는 y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.

즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

3. 다음 중 거짓인 명제는?

- ① 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.
- ④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.
- ⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다.

①, ② 생략

③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$ (참)
(대우가 참 $\rightarrow$ 참인 명제)

④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)

⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

4. 부등식 $a^2 + b^2 > 2(a + b - 1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 > 0, (a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$$

따라서 $a = 1, b = 1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$$\therefore a + b = 2$$

5. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 18

해설

$$(2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b} \right) = 10 + \frac{b}{a} + \frac{16a}{b}$$

산술기하조건을 사용하면

$$\frac{b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 10 + 8 = 18$$

6. 두 집합 $A = \{3, 7, y\}$, $B = \{5, y + 2, x\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A , B 의 모든 원소가 같아야 하므로 $y = 5$ 이고, 다시 집합 B 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{5, 7, x\}$ 이고 $x = 3$ 이다.
따라서 $y - x = 5 - 3 = 2$ 이다.

7. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 12개

⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 2, 3을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
 $\therefore n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B) \cup (A-B^c) = A \cap B$ 가 항상 성립할 때, 다음 중 두 집합 A, B 의 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A \supset B$

② $A \subset B^c$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B^c = \emptyset$

해설

주어진 식을 정리하여 분배법칙을 사용한다. $(A-B) \cup (A-B^c)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap (B^c)^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A \cap (B^c \cup B)$
 $= A \cap U = A$

따라서 $A = A \cap B$ 에서 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$

9. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $ab = 0$

㉡ $a^2 + b^2 = 0$

㉢ $a^2 + b^2 > 0$

㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$

㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$

㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㉠과 ㉤

② ㉡와 ㉣

③ ㉢과 ㉦

④ ㉥와 ㉧

⑤ ㉣과 ㉨

해설

$$ab \leftrightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

$$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b = 0$$

$$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0$$

$$ab = 0 \text{ 이고 } b \neq 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b \neq 0$$

10. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를

(1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x, 0, x\}$

(2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\frac{3}{x}, 1, \frac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.

두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$A = \{x|x \text{는 } 2 \text{의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

,

$$B = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\},$$

$$2 \in A - B \text{ 이므로 } (A - B)[2] = \{-2, 0, 2\} \text{ 이고,}$$

$$6 \notin B - A \text{ 이므로 } (B - A)[6] = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } (A - B)[2] \cup (B - A)[6] = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\} \text{ 이고 } n((A - B)[2] \cup (B - A)[6]) = 5$$