1. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

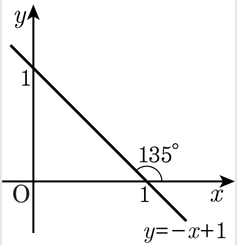
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y절편 1

▷ 정답 : x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



2. 세 점 A(2, 3), B(−1, 9), C(−4, a) 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 17

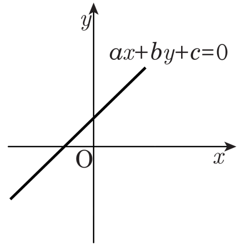
해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{3-9}{2-(-1)}=-2$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 : $\dfrac{a-3}{(-4)-(2)}$ $\therefore\ a=15$

3. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx + ay + b = 0$ 은

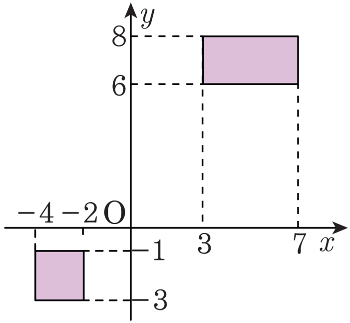
$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

4. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



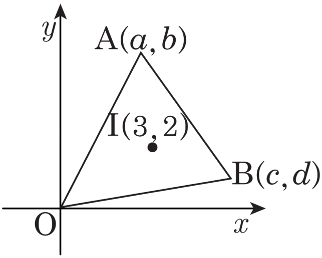
① $\frac{9}{10}$　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{8}{7}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

5. 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d) 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 (3, 2) 이다. $\overline{OA}=\overline{OB}$ 일 때, $\dfrac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$

④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ 알 수 없다

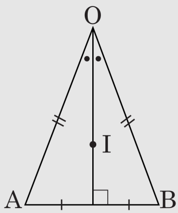
해설

$\triangle$OAB 가 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이고,
$\angle AOI=\angle BOI$ 이므로
$\overline{OI}$ 는 $\overline{AB}$ 와 수직이다.
$\overline{OI}$ 의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로
$\overline{AB}$ 의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{b-d}{a-c}=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore 3a+2b=3c+2d$$

$$\therefore \frac{3c+2d}{3a+2b}=1$$



6. 다음 연립방정식이 $x = y = 0$ 이외의 해를 가질 때, k의 값은?

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = kx \end{cases}$$

① $\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x + 2y = 0 \cdots$ ㉠,
$3x + y = kx \cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡ $\times 2$ 하면 $(2k-5)x = 0$
㉠ $\times (3-k) -$ ㉡ 하면 $(2k-5)y = 0$
따라서 $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
$x = y = 0$
$k = \frac{5}{2}$ 일 때
㉠, ㉡는 $x + 2y = 0$ 이 되어 부정
(참고) $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
두 직선은 원점에서 만나고,
$k = \frac{5}{2}$ 일 때 두 직선은 모두
원점을 지나면서 일치한다.
결국 기울기가 같으면 되므로 처음부터
$-\frac{1}{2} = k - 3$ 으로 해도 된다.

7. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$
④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2$, $y=3$
$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$
구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$
$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다.}\right)$
$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고
$(2,\ 3)$ 을 지나므로
$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$
$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

8. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$ ② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$ ④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots ㉠$

$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

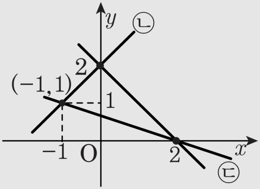
항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$

와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m

은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

9. 두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선은

$$y+1=\frac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 2x-y-5=0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2\times 0-0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

10. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4　② 8　③ $3\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

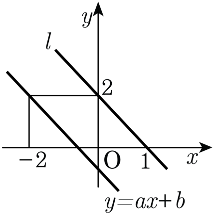
원점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\to 2(a^2+b^2)=16$$

$$\therefore\ a^2+b^2=8$$

11. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



① -4 ② -3 ③ -2

④ -1 ⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

12. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

13. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

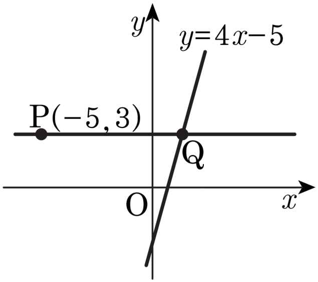
▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad a=2$

14. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5,3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y=4x-5$의 그래프와 만나는 점을 Q라 한다. $\overline{PQ}$의 길이는?



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=3$이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y=4x-5$에 $y=3$을 대입하면 $3=4x-5$
$\therefore x=2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.
$\therefore \overline{PQ}=2-(-5)=7$

15. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,
$p\prime x+q\prime y+r\prime=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp\prime+qq\prime=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r\prime)=0$의
전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\dfrac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.
$\dfrac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

16. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)}=\dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y-1=-\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$

따라서, $a+b=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=1$

17. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

18. 두 직선 $3x + 4y = 24$와 $3x + 4y = 4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

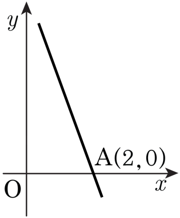
해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

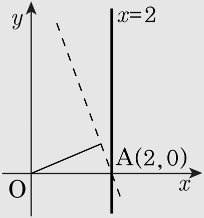
19. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

20. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 A (1 ,2) 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 A (1 ,2) 에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$

$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = 2$

$\therefore\ \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는

$S = \frac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) -$
$(-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$