

1. 두 점 A(2, 0), B(-2, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표를 구하면?

- ① (2, 2) ② (0, 2) ③ (4, 4) ④ (0, 0) ⑤ (4, 1)

해설

$$\overline{AB} \text{ 의 중점은 } \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (0, 2)$$

2. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

3. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 28 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

4. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$

② $\sim q \rightarrow p$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$
 $\therefore q \rightarrow \sim p$

5. 두 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P , y 축 위의 점을 Q 라 하면, $\triangle OPQ$ 의 무게중심은 $G(-1, 1)$ 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$ 라 하면,

$$\frac{0+x+0}{3} = -1, \frac{0+0+y}{3} = 1 \text{에서}$$

$$x = -3, y = 3$$

$$\therefore P(-3, 0), Q(0, 3)$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{에서}$$

$$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$$

$$a^2 + 6a + 9 = b^2$$

$$\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2 \text{에서}$$

$$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 = b^2 - 6b + 9$$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

6. 원점에서 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

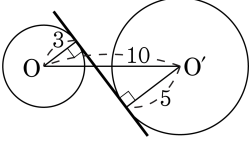
▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0 \times 3 + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

7. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
 $(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
 $(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
 $\therefore a = 2$

10. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동

한

점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여

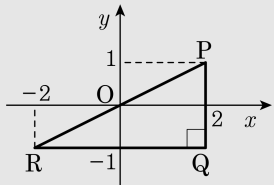
대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을

꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



11. 다음 중 집합 {1, 3, 5, 7, 9} 를 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은?
- ① $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 홀수}\}$
 - ② $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$
 - ③ $\{x \mid x \text{는 } 11 \text{ 미만의 홀수}\}$
 - ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$
 - ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수 중 } 2 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 1 \text{ 인 수}\}$

해설

④ {1, 3, 5, 7}

12. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

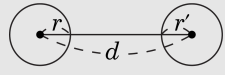
$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

13. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$, $C_2 : (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$ 에 대하여 공통 접선의 개수가 4개가 되도록 하는 양의 정수 r 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

공통접선이 4개인 경우 $r + r' < d$ 인 경우



$$C_1 \Rightarrow (0, 0) \quad r = r'$$

$$C_2 \Rightarrow (6, 8) \quad r = 2$$

$$\text{중심거리 } (d) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\therefore r + 2 < 10$$

$$r < 8 \quad (\text{단, } r > 0)$$

r 의 갯수는 $r = 1, 2, 3 \dots 7$ 이므로 7개이다.

14. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

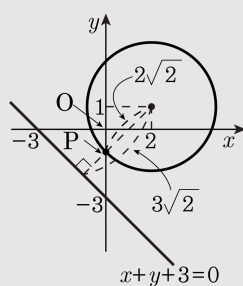
따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원을 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x+y+3=0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



15. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 를 원 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(2,3)$
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(-1,5)$
점 $(-1, 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x+3)+3(y-2)+2=0$
 $\therefore x+3y-1=0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
 $a=3, b=-1 \therefore a+b=2$

16. $A = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4, 28, 16, 8, a, b, 20\}$ 인 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

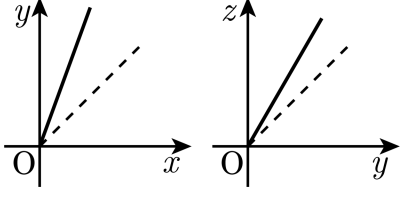
해설

$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ 이고

$B = \{4, 8, 16, 20, 28, a, b\}$ 이므로

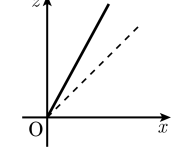
$a + b = 12 + 24 = 36$ 이다.

17. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

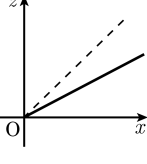


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

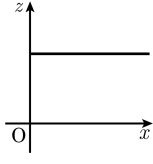
①



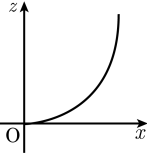
②



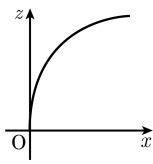
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$
 $\therefore z = b(ax) = abx \ (ab > 1)$
 따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

18. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

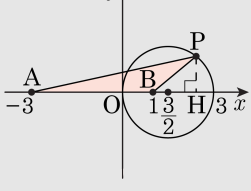
$$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

이 때, $\overline{AB} = 4$ 이고 $\overline{PH}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$$



19. 다음은 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?
- ① 5, 31

② 6, 63

③ 7, 127

④ 8, 255

⑤ 9, 511

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 이므로 원소의 개수는 8개이다.
(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) - 1
이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$ 이고
진부분집합의 개수는 $256 - 1 = 255$ (개)이다.

20. 어느 반의 63%의 학생은 공부를 잘하고 76%의 학생은 운동을 잘한다. 운동도 잘하고 공부도 잘하는 학생수의 최대, 최소 %(백분율)는 각각 얼마인가 ?
- ① 최대 89%, 최소 13% ② 최대 63%, 최소 39%
- ③ 최대 76%, 최소 37% ④ 최대 39%, 최소 24%
- ⑤ 최대 76%, 최소 39%

해설

전체집합을 U , 공부를 잘하는 학생의 집합을 A , 운동을 잘하는 학생의 집합을 B 라 하면 공부도, 운동도 잘하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다. $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \subset B$ 일 때 최대가 되고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \cup B = U$ 일 때 최소가 된다. $A \subset B$ 일 때 $A \cap B = A$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) = 63\%$
 $A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cup B) = 100\%$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U) = 63 + 76 - 100 = 39(\%)$
따라서, 최대 63%, 최소 39%